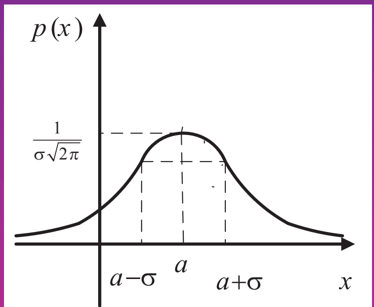
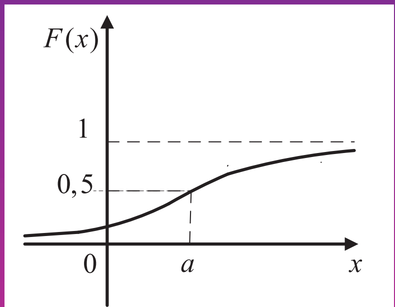
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б.Н.Ельцина
Уральский энергетический институт

М. А. ПЛЕСКУНОВ
Л. В. КОРЧЁМКИНА

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Справочник-практикум





Министерство образования и науки Российской Федерации
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

М. А. Плескунов
Л. В. Корчёмкина

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Справочник-практикум

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2017

УДК 519.21(076.5)
ББК 22.171я7-5

Рецензенты:

кафедра высшей и прикладной математики Уральского государственного университета путей сообщения, зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, проф. Г. А. Тимофеева

д-р физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник ИММ УрО РАН Ю. И. Бердышев

Научный редактор — д-р физ.-мат. наук, проф. А. Н. Сесекин

Плескунов, М. А.

Теория вероятностей : справочник / М. А. Плескунов, Л. В. Корчёмкина. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2017. — 136 с.

ISBN 978-5-7996-1946-6

Справочник предназначен для студентов гуманитарных специальностей, изучающих курс высшей математики, и всех студентов, изучающих курс теории вероятностей. Пособие содержит три раздела и приложения. Первый раздел — «Случайные события», второй раздел — «Случайные величины», третий раздел — «Иллюстрирующие примеры». В этих разделах рассматриваются справочный теоретический материал и примеры решения задач. В приложениях приведены алгоритм решения задач на нахождение вероятностей случайных событий, таблицы нормального распределения и формулы комбинаторики.

Библиогр.: 5 назв., рис. 18.

УДК 519.21(076.5)
ББК 22.171я7-5

ISBN 978-5-7996-1946-6

Раздел 1. **Случайные события**

1. Определения основных терминов

Название	Определение
Теория вероятностей	Раздел математики, который занимается изучением закономерностей появления массовых случайных явлений (событий)
Опыт (испытание)	Реализация совокупности определенных условий, порождающая некоторый результат (событие). Предполагается, что опыт (испытание) можно повторять неоднократно, не изменяя условий его реализации
Событие (исход опыта, испытания)	Результат проведения опыта (испытания). Результат реализации необходимой совокупности условий
Случайное событие	Событие, которое может произойти или не произойти в результате испытания (опыта), т. е. в результате реализации определенной совокупности условий
Массовые события	События, которые при воспроизведении определенных условий могут появляться неоднократно
Достоверное событие (для данного опыта)	Результат, который всегда возникает при проведении данного испытания (опыта); событие, являющееся суммой всех событий, составляющих полную группу событий данного опыта; пространство элементарных исходов данного опыта, рассматриваемое как событие

Название	Определение
Невозможное событие (для данного опыта)	Результат, который никогда не возникает и не может возникнуть при проведении данного опыта (испытания)
Элементарное событие	Событие, которое в данном опыте рассматривается как неразложимое на более простые события, составляющие его
Сложное событие	Событие, представляющее совокупность нескольких более простых событий, появление каждого из которых или их совместное появление в результате проведения опыта влечет за собой появление и данного события
Несовместные события	Группа событий, появление одного из которых исключает появление всех остальных событий этой группы в данном испытании. Совместное появление любых событий этой группы — событие невозможное, или, по-другому, произведение любых двух событий этой группы есть невозможное событие
Совместные события	События, которые могут появиться вместе как результат одного и того же испытания (опыта)
Равновозможные события	Группа событий, каждое из которых не более возможно, чем любое другое событие этой группы. Как правило, заключение о равновозможности событий делают исходя из соображений симметрии рассматриваемых явлений. Другими словами, это события, вероятности появления которых одинаковы (равны)
Полная группа событий (для данного опыта)	Такая группа событий, что в результате испытания (т. е. каждого проведения данного опыта) обязательно появится хотя бы одно из событий этой группы. Сумма всех событий полной группы является достоверным событием
Полная группа несовместных событий (для данного опыта)	Такая группа событий, что в результате каждого данного опыта обязательно появится одно и только одно из событий этой группы

Название	Определение
Исходы опыта, благоприятствующие появлению некоторого события	Исходы опыта (т. е. события), при появлении которых обязательно появляется и данное событие

Действия с событиями

Название	Формула	Определение
Сумма двух событий	$A + B$	Событие, состоящее в том, что в результате опыта произойдет хотя бы одно из этих двух событий, т. е. или событие A, или событие B, или оба эти события вместе
Сумма нескольких событий	$A_1 + A_2 + \ldots + A_n$	Событие, состоящее в том, что в результате опыта произойдет хотя бы одно (по крайней мере одно) из слагаемых событий
Произведение двух событий	AB	Событие, заключающееся в том, что в результате испытания произойдут и событие A и событие B
Произведение нескольких событий	$A_1A_2 \ldots A_n$	Событие, заключающееся в том, что в результате испытания произойдут все события-сомножители (вместе)
Противоположное событие	$\bar{A}$	Событие, состоящее в том, что в результате опыта событие A не произойдет

2. Определения вероятности

Название	Определение	Формула	Замечание
Классическое	Отношение всех элементарных несовместных равновозможных исходов опыта, благоприятствующих появлению события A, ко всем элементарным несовместным и равновозможным исходам опыта, составляющим полную группу, называется *вероятностью* события A	$P(A)=\dfrac{m}{n}$	n — число всех элементарных несовместных и равновозможных исходов опыта, составляющих полную группу, m — число всех элементарных несовместных и равновозможных исходов, благоприятствующих появлению события A
Геометрическое	Пусть событие A — попадание точки, наугад брошенной в область D, в ее подобласть d. Тогда *вероятность* события A определяется как отношение меры подобласти d к мере области D	$P(A)=\dfrac{mes\ d}{mes\ D}$, $d \subseteq D$	Говорят, что в область D наугад брошена точка: 1) если брошенная точка попадает обязательно в одну из точек области D (достоверное событие); 2) если брошенная точка попадает в точку области D с одинаковой возможностью для всех точек области D (равновозможность всех исходов); 3) если попадание точки в область d, где $d \subseteq D$, т. е. d — подобласть области D, не зависит от расположения этой области внутри области D

Название	Определение	Формула	Замечание
Статистическое	*Вероятностью* $P(A)$ события A называется то постоянное число, около которого стабилизируется и группируется, приближаясь к нему, относительная частота этого события при неограниченном увеличении числа испытаний	$P(A)=\lim\limits_{n^*\to\infty} W(A)= =\lim \dfrac{m^*}{n^*}$	$W(A)$ — относительная частота события A: $W(A)=\dfrac{m^*}{n^*}$, где m^* — число появлений события A, n^* — число проведенных испытаний; определяется после проведения испытаний
Аксиоматическое	*Вероятностью* называется числовая функция P, определенная на поле событий $\mathfrak{F}$ и удовлетворяющая трем аксиомам вероятности	$P:\ A\to P(A)$, $A\in\mathfrak{F}$, $P(A)\in R$	Аксиомы вероятности 1. Вероятность $P(A)$ любого события неотрицательна. 2. Вероятность достоверного события равна единице. 3. Вероятность суммы несовместных событий равна сумме их вероятностей

3. Условная вероятность

Название	Определение
Условная вероятность	Вероятность одного события при условии, что некоторое другое событие произошло. Обозначим через $P(A\mid B)$ вероятность события A при условии, что событие B произошло. Вероятностью события A при условии, что событие B произошло, называется отношение вероятности совместного появления этих событий к безусловной вероятности появления события B: $P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)},\quad P(B)\neq 0.$ Вероятность события B при условии, что событие A произошло: $P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)},\ P(A)\neq 0$

4. Независимые события

Название	Определение
Независимость двух событий	События A и B называются *независимыми,* если вероятность их совместного появления (произведения) равна произведению безусловных вероятностей этих событий: $P(AB)=P(A)P(B)$
Критерий независимости двух событий	События A и B являются *независимыми* тогда и только тогда, когда $P(A\mid B)=P(A)$ и $P(B\mid A)=P(B)$

Название	Определение
Независимость нескольких событий (или независимость в совокупности)	События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются *независимыми в совокупности,* или просто *независимыми,* если: а) все они попарно независимы, т. е. A_i, A_j — независимы $\forall i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$, и значит $P(A_i \mid A_j) = P(A_i)$; б) каждое из этих событий независимо от любого произведения любых оставшихся событий: A_i, $A_{j1} A_{j2} \ldots A_{jk}$ – независимы при $i \neq j_l$, $l = \overline{1, k}$, $k = \overline{2, n-1}$. Это значит, что $P(A_i \mid A_{j1} A_{j2} \ldots A_{jk}) = P(A_i)$.

5. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Теорема	Формула	Замечания
Теорема сложения вероятностей для двух событий	$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$	A, B — произвольные события
Теорема сложения вероятностей для трех событий	$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) -$ $- P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$	A, B, C — произвольные события

Теорема	Формула	Замечания
Теорема сложения вероятностей для n событий	$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=\sum P(A_i)-$ $-\sum_{i<j}P(A_iA_j)+\sum_{i<j<k}P(A_iA_jA_k)-\ldots$ $\ldots+(-1)^{n+1}P(A_1A_2\ldots A_n)$ $i,j,k,\ldots=\overline{1,n}$	$A_1, A_2, \ldots, A_n$ — произвольные события
Теорема сложения вероятностей для двух несовместных событий	$P(A+B)=P(A)+P(B)$	A, B — несовместные события
Теорема сложения вероятностей для трех несовместных событий	$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)$	A, B, C — несовместные события
Теорема сложения вероятностей для n несовместных событий	$P(A_1+A_2+\ \ldots\ +A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$	$A_1, A_2, \ldots, A_n$ — несовместные события
Теорема умножения вероятностей для двух событий	$P(AB)=P(A)P(B\|A)$ или $P(AB)=P(B)P(A\|B)$	A, B — произвольные, в частности, зависимые события
Теорема умножения вероятностей для трех событий	$P(ABC)=P(A)P(B\|A)P(C\|AB)$	A, B, C — произвольные, в частности, зависимые события
Теорема умножения вероятностей для n событий	$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2\|A_1)\times$ $\times P(A_3\|A_1A_2)\ldots P(A_n\|A_1A_2\ldots A_{n-1})$.	$A_1, A_2, \ \ldots, A_n$ — произвольные, в частности, зависимые события
Теорема умножения вероятностей для двух независимых событий	$P(AB)=P(A)P(B)$	A, B — независимые события

Теорема	Формула	Замечания
Теорема умножения вероятностей для трех событий, независимых в совокупности	$P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$	A, B, C — события, независимые в совокупности
Теорема умножения вероятностей для n независимых в совокупности событий	$P(A_1A_2\ \dots\ A_n) = P(A_1)P(A_2)\times$ $\times P(A_3)\ \dots\ P(A_n)$	$A_1, A_2, \dots, A_n$ — события, независимые в совокупности

Замечания к теоремам сложения и умножения вероятностей

<table>
<tr><td rowspan="2">Замечание 1</td><td colspan="2">Не следует путать понятия несовместности и независимости событий</td></tr>
<tr><td>Совместные события могут быть независимыми или зависимыми</td><td>Несовместные события, вероятность которых отлична от нуля, всегда зависимые</td></tr>
<tr><td>Замечание 2</td><td colspan="2">При использовании теоремы сложения вероятностей слагаемые события следует проверить на несовместность</td></tr>
<tr><td>Замечание 3</td><td colspan="2">При использовании теоремы умножения вероятностей события-сомножители следует проверить на независимость</td></tr>
</table>

Теорема	Формула	Замечания
Вероятность появления только одного из нескольких независимых в совокупности событий	$P(A)=P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3\ldots\bar{A}_n+$ $+\bar{A}_1A_2\bar{A}_3\ldots\bar{A}_n+\ldots+\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\ldots A_n)=$ $=p_1q_2q_3\ldots q_n+q_1p_2q_3\ldots q_n+\ldots+q_1q_2q_3\ldots p_n$	$A_1, A_2, \ldots, A_n$ — события, независимые в совокупности. $P(A_i)=p_i$ — вероятность появления события A_i, $i=\overline{1,n}$, $P(\bar{A}_i)=1-p_i=q_i$ — вероятность непоявления события A_i, $i=\overline{1,n}$
Вероятность появления хотя бы одного из событий, независимых в совокупности	$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=1-P(\bar{A}_1\bar{A}_2\ldots\bar{A}_n)=$ $=1-q_1q_2\ldots q_n$	$A_1, A_2, \ldots, A_n$ — события, независимые в совокупности. $P(A_i)=p_i$, $P(\bar{A}_i)=1-p_i=q_i$
Формула полной вероятности	$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A\mid H_i)$, или $P(A)=P(H_1)P(A\mid H_1)+P(H_2)P(A\mid H_2)+$ $P(H_3)P(A\mid H_3)+\ldots+P(H_n)P(A\mid H_n)$	Событие A может произойти только вместе с одним из n несовместных событий $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n$. События H_i, $i=\overline{1,n}$, называют гипотезами
Формулы Байеса (Бейеса) — формулы проверки гипотез	$P(H_i\mid A)=\dfrac{P(H_i)P(A\mid H_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A\mid H_i)}$, $i=\overline{1,n}$	Эти формулы называют также формулами переоценки гипотез

6. Независимые испытания (схема Бернулли)

Название	Признак
Независимые испытания	Вероятность любого исхода каждого испытания не зависит от результатов предшествующих испытаний
Однородные испытания	Вероятность любого исхода каждого испытания не зависит от номера испытания
Испытания по схеме Бернулли	Независимые однородные испытания, в которых рассматриваются только два исхода: появление и непоявление события A. В испытаниях по схеме Бернулли вероятность появления события A в каждом испытании $p = P(A) = \text{const}$ на протяжении всей серии испытаний
Полиномиальная схема испытаний	Независимые однородные испытания, в каждом из которых может произойти один из нескольких возможных исходов: $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Вероятность каждого исхода постоянна на протяжении всей серии испытаний: $p_i = P(A_i) = \text{const}$, $i = \overline{1, m}$

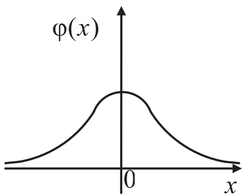
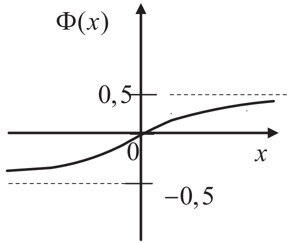
Название теоремы (формулы)	Формула	Условия применения теоремы (формулы)
Формула Бернулли	$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$	$0 < p < 1$
Обобщенная формула Бернулли	$P_n(m_1 \le m \le m_2) = P_n(m_1) + P_n(m_1+1) + \ldots + P_n(m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} C_n^m p^m q^{n-m}$	$0 < p < 1$

Название	Пояснение
m	Число появлений события A в испытаниях по схеме Бернулли
$P_n(m)$	Вероятность того, что в n испытаниях по схеме Бернулли событие A появится ровно m раз
p	Вероятность появления события A в каждом испытании
$q = 1 - p$	Вероятность непоявления события A в каждом испытании

Непосредственный подсчет по формуле Бернулли при больших значениях *n* и *m* бывает затруднителен. Существуют более удобные для вычислений приближенные формулы, точность расчета по которым повышается при увеличении числа *n*. Такие формулы называются асимптотическими.

Название теоремы (формулы)	Формула	Условия применения теоремы (формулы)
Локальная теорема Муавра — Лапласа	$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)$, где $x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $e \approx 2{,}72$	$\begin{cases} n \geq 10, \\ 0{,}1 \leq p \leq 0{,}9 \end{cases}$
Интегральная теорема Муавра — Лапласа	$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \Phi(x'') - \Phi(x')$, где $x' = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x'' = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$. $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ — функция Лапласа	$\begin{cases} n \geq 10, \\ 0{,}1 \leq p \leq 0{,}9 \end{cases}$

Примечание

<table>
<tr><th>Функции</th><th colspan="2">Свойства функций</th></tr>
<tr><td>$\varphi(x)$</td><td colspan="2">1) Табулирована для $0 \le x \le 3{,}99$;
2) $\varphi(x)$ — четная функция: $\varphi(-x) = \varphi(x)$;
3) при $x > 3{,}99$ $\varphi(x) \approx 0$</td></tr>
<tr><td>$\Phi(x)$
функция Лапласа</td><td colspan="2">1) Табулирована для $0 \le x \le 5$;
2) $\Phi(x)$ — нечетная функция: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$;
3) для $x > 5$ $\Phi(x) \approx 0{,}5$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Графики функций</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\varphi(x)$</td><td>$\Phi(x)$ — функция Лапласа</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td></td></tr>
</table>

Таблицы функций $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ даны в прил. 3 и 4.

Название теоремы (формулы)	Формула	Условия применения теоремы (формулы)
Теорема Пуассона	$P_n(m) \approx \frac{(np)^m}{m!} e^{-np}$	$\begin{cases} n \geq 20, \\ p \leq 0{,}1, \\ np \leq 7 \end{cases}$
Полиномиальная схема испытаний	$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_m) = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_m!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_m^{n_m}$. $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_m = n$	В n испытаниях исход A_1 появится n_1 раз, исход A_2 n_2 раза, ..., исход A_m появится n_m раз

7. Наивероятнейшее число появлений события в испытаниях по схеме Бернулли

Название	Формула	Пояснение
Наивероятнейшее число появлений события	Это целое число m_0, которое удовлетворяет двойному неравенству: $np - q \leq m_0 < np + p$. $P_n(m_0) = \max P_n(m), \quad m = \overline{0, n}$	n — число независимых испытаний, p — вероятность появления события A в каждом испытании, $q = 1 - p$ — вероятность непоявления события A в каждом испытании
Наивероятнейшее число появлений события при $m_0 = np - q$ (когда $np - q$ — целое число)	В этом случае два наивероятнейших значения: m_0 и $m_0' = m_0 + 1$. $\begin{cases} m_0 = np - q, \\ m_0' = m_0 + 1 = np + p. \end{cases}$ $P_n(m_0) = P_n(m_0') = \max P_n(m), \quad m = \overline{0, n}$	n — число независимых испытаний, p — вероятность появления события A в каждом испытании, $q = 1 - p$ — вероятность непоявления события A в каждом испытании

Раздел 2. **Случайные величины**

1. Определения

Название	Определение
Случайная величина	Числовая величина, меняющая свое значение в зависимости от того, какое случайное событие произошло в результате проведения испытания. Другими словами, это числовая функция случайного аргумента, определенная на пространстве элементарных событий, соответствующих рассматриваемому опыту, и удовлетворяющая условию: для любого действительного числа x событие, заключающееся в том, что эта функция приняла значение, меньшее данного числа x, принадлежит полю событий, связанному с рассматриваемым опытом. X, Y, ξ, η — обозначения случайных величин
Функция распределения случайной величины	Определяется как вероятность того, что эта случайная величина примет значение, меньшее, чем x (где x — произвольное действительное число): $F_\xi(x) = F(x) = P(\xi < x)$

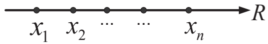
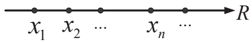
2. Свойства функции распределения случайной величины

Свойства функции распределения случайной величины	Пояснение
$0 \le F(x) \le 1$	Значения функции распределения всегда лежат в пределах от 0 до 1
$F(-\infty) = 0,\ F(+\infty) = 1$	Здесь $F(+\infty)$ понимается как $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$, а $F(-\infty)$ как $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$
Из $x_1 < x_2$ следует $F(x_1) \le F(x_2)$	Функция $F(x)$ — неубывающая
$P(a \le \xi < b) = F(b) - F(a)$	Вероятность нахождения случайной величины в полуинтервале $[a, b)$
$P(\xi = a) = F(a+0) - F(a)$	Здесь $F(a+0)$ обозначает правый односторонний предел функции в точке a: $$F(a+0) = \lim_{x\to a+0} F(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} F(x) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} F(a+\varepsilon)$$
Функция $F(x)$ непрерывна в каждой своей точке слева: $\forall x \in R \quad F(x-0) = F(x)$	$$F(a-0) = \lim_{x\to a-0} F(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} F(x) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} F(a-\varepsilon),$$ что означает левый односторонний предел функции в точке a

Следствия из 4–6 свойств	Примечания
$P(a \le \xi \le b) = F(b+0) - F(a)$	Включена возможность попадания в точку $x = b$
$P(a < \xi \le b) = F(b+0) - F(a+0)$	Включена возможность попадания в точку $x = b$ и исключена возможность попадания в точку $x = a$
$P(a < \xi < b) = F(b) - F(a+0)$	Исключена возможность попадания в точку $x = a$

3. Виды случайных величин

Различают два основных вида случайных величин.

Виды случайных величин	Определение
Дискретные случайные величины	Это величины, множество значений которых дискретно, т. е. представляет собой совокупность отдельных изолированных точек числовой оси. Если M — множество значений дискретной случайной величины, то оно может быть двух типов: а) $M = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ — конечное множество:  б) бесконечное множество, не содержащее предельных точек: 

Виды случайных величин	Определение
Непрерывные случайные величины	Это величины, значения которых заполняют сплошь один или несколько промежутков числовой оси (в том числе они могут заполнять собой и всю числовую ось):  или  Другими словами, это величины, для которых существует неотрицательная функция $p(x)$ – такая, что функция распределения этой случайной величины $$F(x) = F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt$$

4. Функция распределения дискретной случайной величины и ее график

Дискретная случайная величина задается законом распределения — формулой, определяющей ее возможные значения и их вероятности, или таблицей, в которой указаны возможные значения случайной величины и вероятности, с которыми она принимает эти значения. Такая таблица называется рядом распределения.

ξ	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Сумма вероятностей всех возможных значений дискретной случайной величины должна быть равна единице.

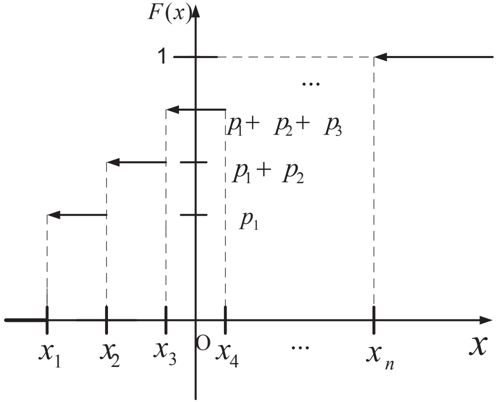
Функция распределения случайной величины:

$$F(x) = P(\xi < x).$$

Для заданного ряда распределения эта функция примет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le x_1, \\ p_1 & \text{при } x_1 < x \le x_2, \\ p_1 + p_2 & \text{при } x_2 < x \le x_3, \\ p_1 + p_2 + p_3 & \text{при } x_3 < x \le x_4, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ 1 & \text{при } x > x_n, \end{cases} \quad \text{т.е. } F(x) = \sum_{x_i < x} p_i.$$

Вид графика функции $F(x)$ представлен на рисунке.



Вероятность попадания случайной величины в заданный промежуток числовой оси для дискретной случайной величины можно вычислить двумя способами.

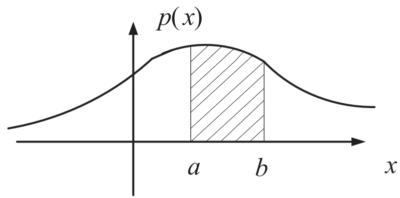
Первый способ	Второй способ
$P(a \le \xi < b) = F(b) - F(a)$	$P(a \le \xi < b) = \sum\limits_{x_i \in [a;b)} p_i$
$P(a \le \xi \le b) = F(b+0) - F(a)$	$P(a \le \xi \le b) = \sum\limits_{x_i \in [a;b]} p_i$
$P(a < \xi \le b) = F(b+0) - F(a+0)$	$P(a < \xi \le b) = \sum\limits_{x_i \in (a;b]} p_i$
$P(a < \xi < b) = F(b) - F(a+0)$	$P(a < \xi < b) = \sum\limits_{x_i \in (a;b)} p_i$

5. Непрерывные случайные величины

5.1. Функция плотности распределения вероятностей случайной величины

Функция $p(x) = F'(x)$ называется плотностью распределения вероятностей или дифференциальной функцией распределения; в последнем случае функцию $F(x)$ называют интегральной функцией распределения случайной величины.

5.2. Свойства плотности распределения вероятностей случайной величины

Свойства	Пояснение
$p(x) \geq 0$	Следует из определения
$p(x) = F'(x)$	Во всех точках непрерывности функции $p(x)$
$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(t)dt$	Следует из определения
$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$	Площадь подграфика функции $y = p(x)$ равна единице (вероятность достоверного события)
$P(a \leq \xi < b) = \int\limits_{a}^{b} p(x)dx$	
$P(\xi = a) = 0$	Следствие пятого свойства: вероятность того, что случайная величина непрерывного типа примет заранее определенное значение a, равна нулю

Непрерывная случайная величина задается либо плотностью распределения вероятностей $p(x)$, либо самой функцией $F(x)$.

6. Числовые характеристики случайных величин

6.1. Математическое ожидание случайной величины

Математическое ожидание — это среднее значение случайной величины (центр распределения случайной величины).

Числовые характеристики случайных величин	Формула
Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений возможных значений случайной величины на соответствующие им вероятности	1. Для дискретной случайной величины с конечным множеством значений: $$M\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n,$$ $M\xi$ или $M(\xi)$ — обозначения математического ожидания случайной величины ξ. 2. Для дискретной случайной величины с бесконечным множеством значений: $$M\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i,$$ если полученный ряд сходится абсолютно

Числовые характеристики случайных величин	Формула
Математическое ожидание непрерывной случайной величины с плотностью распределения вероятностей $p(x)$	1. Для непрерывной случайной величины, распределенной на интервале (a,b): $$M\xi=\int_a^b xp(x)dx.$$ 2. Для непрерывной случайной величины, распределенной на всей числовой оси: $$M\xi=\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx,$$ если этот несобственный интеграл сходится абсолютно

Свойства математического ожидания случайной величины

Свойство	Пояснение
$M(C)=C,\ C=\text{const}$	Математическое ожидание константы есть сама эта константа
$M(C\xi)=CM\xi,\quad C=\text{const}$	Постоянный множитель можно вынести за знак математического ожидания
$M(\xi+\eta)=M\xi+M\eta$	Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий
$M(\xi\eta)=M\xi M\eta$, ξ и η — независимые	Если случайные величины независимы, то математическое ожидание произведения этих случайных величин равно произведению их математических ожиданий

6.2. Дисперсия (или рассеяние) случайной величины

Дисперсия дает среднее значение квадрата отклонения случайной величины от ее среднего значения, поэтому может служить числовой характеристикой разброса значений случайной величины.

Числовые характеристики случайных величин	Формула
Дисперсией (рассеянием) случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания	$D\xi = M(\xi - M\xi)^2$, где $D\xi$ или $D(\xi)$ — обозначение дисперсии случайной величины ξ

Формулы для вычисления дисперсии

Виды случайных величин	Формула
Дисперсия для дискретной случайной величины с конечным множеством значений	$D(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \left[\sum_{i=1}^{n} x_i p_i\right]^2$
Дисперсия для дискретной случайной величины с бесконечным множеством значений	$D(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 p_i - \left[\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i\right]^2$, если данные ряды сходятся абсолютно
Дисперсия для непрерывной случайной величины, распределенной на интервале (a,b)	$D(\xi) = \int_a^b x^2 p(x)dx - \left[\int_a^b xp(x)dx\right]^2$

Виды случайных величин	Формула
Дисперсия для непрерывной случайной величины, распределенной на всей числовой оси	$D(\xi)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx-\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx\right]^2$, если несобственные интегралы сходятся абсолютно
В общем случае	$D\xi = M(\xi^2)-(M\xi)^2$

Примечание. Найдем формулы для отыскания $M(\xi^2)$. Пусть дискретная случайная величина дана рядом распределения:

ξ	x_1	x_2	...	x_n	–
p_i	p_1	p_2	...	p_n	$\sum p_i = 1$

Найдем ряд распределения случайной величины ξ^2:

ξ^2	x_1^2	x_2^2	...	x_n^2	–
p_i	p_1	p_2	...	p_n	$\sum p_i = 1$

Действительно, ξ^2 примет значение x_i^2 в том случае, если ξ примет значение x_i, поэтому

$$P(\xi^2 = x_i^2) = P(\xi = x_i) = p_i.$$

Тогда $M(\xi^2)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2 p_i$ (или $\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2 p_i$). Аналогично для непрерывной случайной величины

$$M(\xi^2)=\int_a^b x^2 p(x)dx \text{ (или } M(\xi^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx).$$

Свойства дисперсии случайной величины

Свойство	Пояснение
$D(C)=0,\ C=\text{const}$	Дисперсия константы равна нулю
$\forall\xi\quad D\xi\geq 0$	Дисперсия любой случайной величины неотрицательна
$D(C\xi)=C^2D\xi,\ C=\text{const}$	Дисперсия произведения константы на случайную величину равна произведению квадрата константы на дисперсию этой случайной величины
$D(\xi+\eta)=D\xi+D\eta$, ξ и η — независимые	Если случайные величины независимы, то дисперсия их суммы равна сумме их дисперсий
$D(\xi-\eta)=D\xi+D\eta$, ξ и η — независимые	Если случайные величины независимы, то дисперсия их разности равна сумме их дисперсий

Среднеквадратическое отклонение

Недостатком дисперсии как характеристики разброса значений случайной величины является то, что размерность дисперсии равна квадрату размерности самой случайной величины. Поэтому более удобной характеристикой является среднеквадратическое отклонение, которое определяется как квадратный корень из дисперсии.

Формула среднеквадратического отклонения: $\sigma(\xi)=\sqrt{D(\xi)}$.

Поскольку дисперсия любой случайной величины неотрицательна, среднеквадратическое отклонение случайной величины существует, если у нее существует дисперсия. Размерность самой случайной величины и ее среднеквадратического отклонения совпадают. Среднеквадратическое отклонение является наиболее удобным показателем разброса значений случайной величины вокруг ее среднего значения.

7. Некоторые из основных законов распределения случайных величин

7.1. Законы распределения дискретных случайных величин

Название закона	Формула	Пояснение
Биномиальный закон	$P_n(\xi = m) = P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$ $p = P(A),\ \ q = 1 - p,\ \ \ m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, n.$ $0 < p < 1$	Закон, связанный со схемой испытаний Бернулли, задается формулой Бернулли. Это закон, по которому распределена случайная величина ξ — число появлений события A в n испытаниях по схеме Бернулли. ξ может принимать значения 0, 1, 2, ..., n
Закон Пуассона (закон редких случайных событий)	$P(m) = \dfrac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$ $m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$	Это предельный случай формулы Бернулли при $n \to \infty,\ p \to 0$, но так, что $np \to \lambda = \text{const}\,(\lambda > 0)$, т. е. когда число испытаний в схеме Бернулли неограниченно увеличивается, а вероятность появления события становится ничтожно мала (редкое событие), но при этом их произведение np стремится к некоторой положительной константе λ
Геометрическое распределение	$P(\xi = m) = q^{m-1} p$ $p = P(A),\ \ q = 1 - p,$ $m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$	Закон, дающий распределение числа проведенных испытаний до первого появления события A, которое может появиться в каждом испытании с вероятностью $p (0 < p < 1)$

Название закона	Формула	Пояснение
Гипергеометрическое распределение	$P(\xi = m) = \dfrac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$ $m = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots, k$ $k = \min(M, n)$	Закон, дающий распределение числа элементов, обладающих заданным признаком, среди *n* элементов, отобранных случайно и без возврата из множества (генеральной совокупности), содержащего *N* элементов, *M* из которых обладают данным признаком. Этот закон связан со «схемой урн» и определяется формулой, соответствующей этой схеме. *Замечание.* Если *n* значительно меньше *N* (практически $n<0{,}1N$), то гипергеометрическое распределение дает вероятности, близкие к вероятностям, найденным по биномиальному закону

Ряд распределения случайной величины по биномиальному закону:

ξ	0	1	2	3	...	n	–
p_m	q^n	npq^{n-1}	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	$C_n^3 p^3 q^{n-3}$	...	p^n	$\sum_{m=0}^{n} p_m = 1$

$$p_m = P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Ряд распределения случайной величины по закону Пуассона:

ξ	0	1	2	3	...	n	...	–
p_m	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\dfrac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda}$	$\dfrac{\lambda^3}{6} e^{-\lambda}$	...	$\dfrac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$	...	$\sum_{m=0}^{\infty} p_m = 1$

Ряд распределения случайной величины, имеющей геометрическое распределение:

ξ	1	2	3	...	n	...	–
p_m	p	qp	$q^2 p$	...	$q^{n-1} p$	...	$\sum_{m=1}^{\infty} p_m = 1$

Ряд распределения случайной величины, имеющей гипергеометрическое распределение:

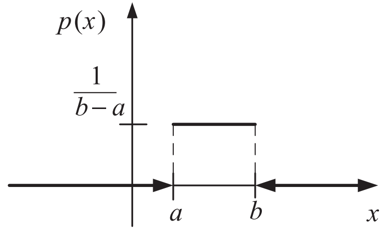
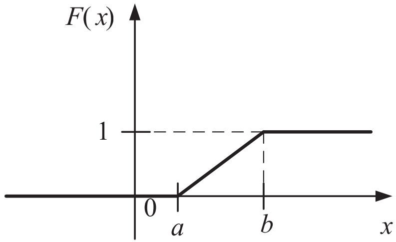
ξ	0	1	2	3	...	k	–
p_m	$\frac{C_{N-M}^n}{C_N^n}$	$\frac{MC_{N-M}^{n-1}}{C_N^n}$	$\frac{C_M^2 C_{N-M}^{n-2}}{C_N^n}$	$\frac{C_M^3 C_{N-M}^{n-3}}{C_N^n}$	...	$\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$	$\sum_{m=0}^{k} p_m = 1$

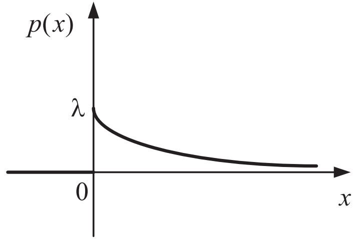
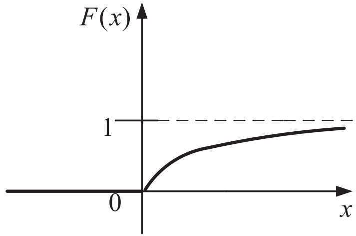
$$k = \min(M, n).$$

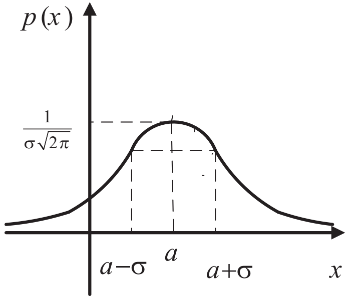
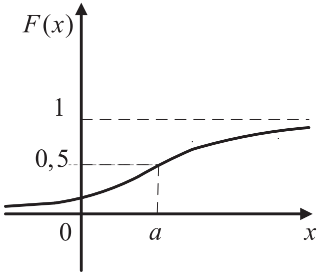
Название закона	Числовые характеристики	Пояснения
Биномиальный закон	$M\xi = np,\ D\xi = npq,\ \sigma(\xi) = \sqrt{npq},$ $q = 1 - p$	Зависит от двух параметров: — числа испытаний — n; — вероятности появления события в каждом из испытаний — p. Обозначают биномиальный закон так: $B(n; p)$
Закон Пуассона (закон редких случайных событий)	$M\xi = \lambda,\ \ D\xi = \lambda,\ \ \sigma(\xi) = \sqrt{\lambda}$	Зависит только от одного параметра λ

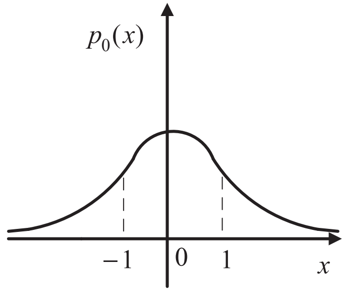
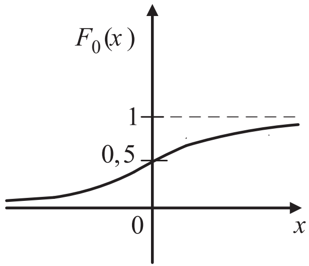
Название закона	Числовые характеристики	Пояснения
Геометрическое распределение	$M\xi = \frac{1}{p}, \; D\xi = \frac{q}{p^2}, \; \sigma(\xi) = \frac{\sqrt{q}}{p}, \; q = 1 - p$	Зависит только от одного параметра p — вероятности появления события
Гипергеометрическое распределение	$M\xi = np, \; D\xi = npq\frac{N-n}{N-1}, \; \sigma(\xi) = \sqrt{D\xi},$ где $p = \frac{M}{N}; \; q = 1 - p = 1 - \frac{M}{N};$ p — вероятность того, что первым появится элемент, обладающий заданным признаком	Зависит от трех параметров: — N — объема генеральной совокупности (множества, из которого отбирают элементы); — M — числа элементов генеральной совокупности (объема N), обладающих заданным признаком; — n — объема выборки (числа случайно отобранных безвозвратно элементов)

7.2. Законы распределения непрерывных случайных величин

<table>
<tr><th>Закон распределения</th><th>Функция</th><th>График функции</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Равномерный закон распределения</td><td>$$p(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<a,\\ \dfrac{1}{b-a} & \text{при } a\le x\le b,\\ 0 & \text{при } x>b\end{cases}$$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при } a\le x\le b,\\ 1 & \text{при } x>b\end{cases}$$</td><td>
</td></tr>
</table>

Закон распределения	Функция	График функции
Показательный (экспоненциальный) закон распределения	Случайная величина ξ называется распределенной по показательному закону, если для нее $p(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x\geq 0, \quad \text{где } \lambda>0\end{cases}$	
	$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ 1-e^{-\lambda x} & \text{при } x\geq 0, \quad \text{где } \lambda>0\end{cases}$	

Закон распределения	Функция	График функции
Нормальный закон распределения	$$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$ где a и σ — параметры, определяющие конкретный вид этого закона, причем $\sigma>0$	
	$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{\frac{-(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt$$	

Закон распределения	Функция	График функции
Стандартное нормальное распределение — частный случай нормального распределения с параметрами (0;1)	$p_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} = \varphi(x),$ где $a = 0$, Ā$=1$	
	$F_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{\frac{-t^2}{2}} dt = 0{,}5 + \Phi(x),$ так как $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{\frac{-t^2}{2}} dt = 0{,}5$ — половина площади фигуры под кривой $y = p_0(x)$. $\Phi(x)$ — функция Лапласа (см. стр. 15–16)	

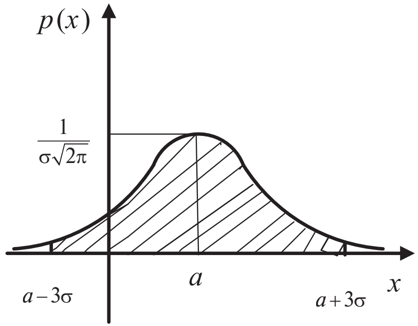
Название закона	Числовые характеристики	Пояснения
Равномерный закон распределения	$M\xi=\frac{b+a}{2},\ D\xi=\frac{(b-a)^2}{12},\ \sigma(\xi)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$	Зависит от двух параметров: a и b — концов промежутка, на котором сосредоточены все значения случайной величины. Его обозначают $R(a;\,b)$
Показательный (экспоненциальный) закон распределения	$M\xi=\frac{1}{\lambda},\ D\xi=\frac{1}{\lambda^2},\ \sigma(\xi)=\frac{1}{\lambda}$	Зависит только от одного параметра λ. Его обозначают $Ex(\lambda)$
Нормальный закон распределения	$M\xi=a,\ D\xi=\sigma^2,\ \sigma(\xi)=\sigma$	Зависит от двух параметров: a и σ, $\sigma>0$. a есть математическое ожидание случайной величины ξ, а σ — ее среднеквадратическое отклонение. Нормальный закон распределения обозначают $N(a,\sigma)$

Название формулы	Формула	Пояснение
Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины ξ в интервал (α,β) или на отрезок $[\alpha,\beta]$	$P(\alpha\le\xi\le\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$	Значения функции $\Phi(x)$ берутся из таблицы значений функции Лапласа (см. прил. 4)
Вероятность того, что нормально распределенная случайная величина ξ отклонится от своего математического ожидания a на величину, меньшую по абсолютной величине, чем некоторое положительное число δ	$P(\lvert\xi-a\rvert<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$	Значения функции $\Phi(x)$ берутся из таблицы значений функции Лапласа (см. прил. 4).

Переход к стандартному нормальному закону распределения

Закон распределения	Формула перехода	Пояснение
Нормальное распределение $N(a;\sigma)$ случайной величины ξ с $M\xi=a$, $\sigma(\xi)=\sigma$	$\eta=\frac{\xi-a}{\sigma}$ $\xi: N(a;\sigma)\;\Rightarrow\;\eta: N(0;1)$	Можно перейти к новой случайной величине η, чтобы воспользоваться готовыми таблицами значений функций $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$
Стандартное нормальное распределение случайной величины η с параметрами 0 и 1	$\xi=\sigma\eta+a$	Обратный переход от величины η к величине ξ

Название формулы	Формула	Пояснение
Правило «трех сигм»	$P(\lvert \xi - a \rvert < 3\sigma) = 2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(3) = 0{,}9973 \approx 1$ (здесь $\delta = 3\sigma$, см. стр. 40)	Если случайная величина распределена по нормальному закону, то практически достоверным событием будет событие, заключающееся в следующем: значение этой случайной величины будет отклоняться от своего математического ожидания на величину, по модулю меньшую утроенного среднеквадратического отклонения



Правило «трех сигм» означает, что практически всегда нормально распределенная случайная величина будет принимать значения, находящиеся в интервале $(a-3\sigma;\ a+3\sigma)$, где a — математическое ожидание этой случайной величины, а σ — ее среднеквадратическое отклонение. Выход значений такой случайной величины за пределы этого интервала чрезвычайно маловероятное (практически невозможное) событие. Заштрихованная на рисунке площадь составляет 99,73 % площади всей фигуры под графиком функции $p(x)$.

Центральная предельная теорема

Название теоремы	Теорема	Пояснение
Центральная предельная теорема	Центральной предельной теоремой называют ряд теорем, указывающих условия, при выполнении которых сумма достаточно большого числа независимых случайных величин имеет распределение, весьма близкое к нормальному, и неограниченно приближающееся к нормальному распределению при увеличении числа слагаемых	Пусть проводится измерение, и ξ — случайная ошибка измерения. Тогда ξ возникает в результате суммарного наложения большого числа факторов, не зависящих друг от друга и порождающих ошибки; каждый из этих факторов оказывает на ошибку малое влияние. Таким образом, согласно теореме Ляпунова (общий случай центральной предельной теоремы), величину ξ можно считать распределенной нормально
Теорема Ляпунова	Если случайная величина представляет собой сумму достаточно большого числа независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то такая случайная величина имеет распределение, весьма близкое к нормальному, и неограниченно приближающееся к нормальному с увеличением числа слагаемых	Теорема Ляпунова объясняет, почему на практике так часто встречаются случайные величины, распределенные именно по нормальному закону. Теорема Ляпунова представляет наиболее общий случай центральной предельной теоремы

8. Некоторые законы распределения, связанные с нормальным распределением

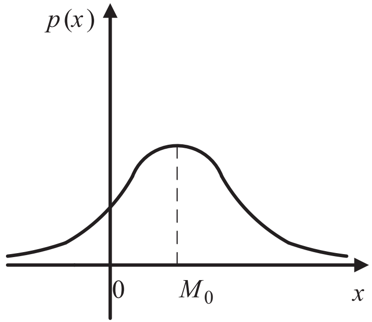
Название распределения	Формула	Пояснение
Биномиальное распределение	$\eta = \dfrac{\xi - np}{\sqrt{npq}}$, где ξ — число появлений события A в испытаниях по схеме Бернулли, n — число испытаний, $p = P(A)$ — вероятность появления события A в каждом испытании, $q = 1 - p$	Биномиальное распределение связано с формулой Бернулли. Локальная и интегральная теоремы Муавра — Лапласа (см. стр. 15) показывают, что с увеличением числа испытаний (при $n \to \infty$) распределение нормированной случайной величины η приближается к стандартному нормальному закону
Закон распределения «хи-квадрат»	$\chi^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2$	Пусть имеется n независимых случайных величин $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, каждая из которых распределена по стандартному нормальному закону $N(0;1)$. Распределение χ^2 зависит от одного параметра n (числа степеней свободы). Это распределение медленно приближается к нормальному распределению с увеличением числа n. Обозначают это распределение $\chi^2(n)$

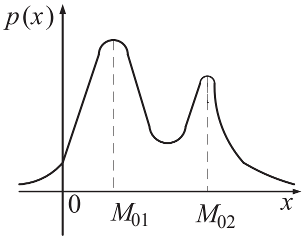
Название распределения	Формула	Пояснение
Распределение Стьюдента (t-распределение)	$T = \dfrac{\xi}{\sqrt{\dfrac{\chi^2}{n}}}$	Пусть имеется случайная величина ξ, распределенная по стандартному нормальному закону $N(0;1)$, и независимая от ξ случайная величина χ^2, имеющая распределение «хи-квадрат» с n степенями свободы: $\chi^2(n)$. Распределение Стьюдента обозначают $t(n)$. Оно зависит от одного параметра — числа степеней свободы n. С увеличением числа n оно быстро приближается к нормальному распределению
Распределение Фишера — Снедекора (F-распределение)	$F = \dfrac{U/n_1}{V/n_2}$	Пусть имеются две независимые случайные величины: $U : \chi^2(n_1)$ и $V : \chi^2(n_2)$, распределенные по закону «хи-квадрат» со степенями свободы n_1 и n_2 соответственно. F-распределение зависит от двух параметров — степеней свободы n_1 и n_2. Это распределение обозначают $F(n_1,n_2)$

Распределения «хи-квадрат», Стьюдента и Фишера — Снедекора часто встречаются в прикладных задачах статистики.

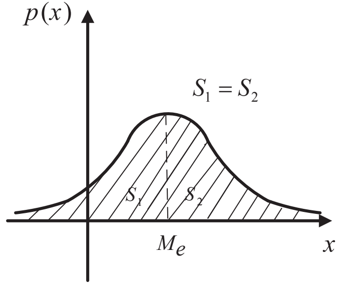
9. Оценка отклонения распределения случайной величины от нормального распределения

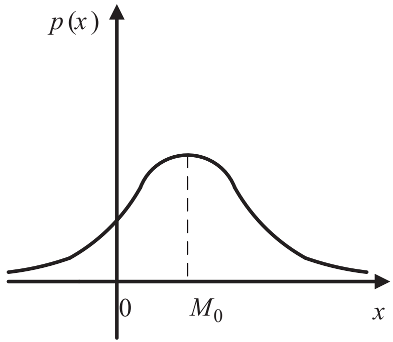
Весьма часто бывает необходимо определить, отклоняется ли и насколько сильно распределение некоторой случайной величины от нормального распределения. Для этого используются следующие показатели: мода, медиана, асимметрия, эксцесс.

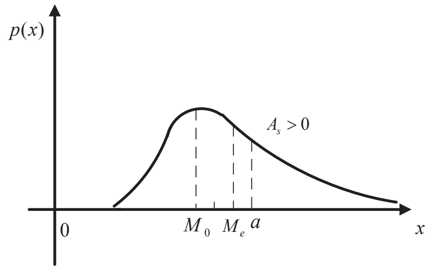
Название показателя	Определение	Пояснение
Мода (M_0)	— Это наивероятнейшее значение для *дискретной* случайной величины; — это точка максимума графика плотности распределения вероятностей *непрерывной* случайной величины	 Распределение, обладающее единственной модой, называется *унимодальным*

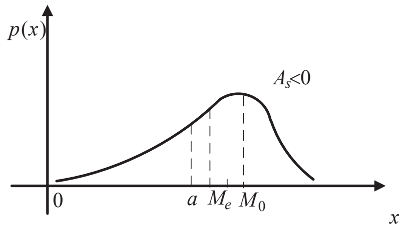
<table>
<tr><th>Название показателя</th><th>Определение</th><th>Пояснение</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Распределение, имеющее две моды, называется бимодальным.


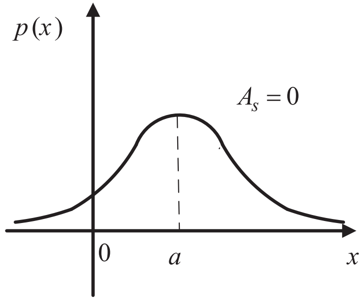
Если распределение имеет более двух мод, оно называется полимодальным</td></tr>
<tr><td colspan="3">Замечание. Мода нормально распределенной случайной величины с параметрами a и σ совпадает с ее математическим ожиданием</td></tr>
</table>

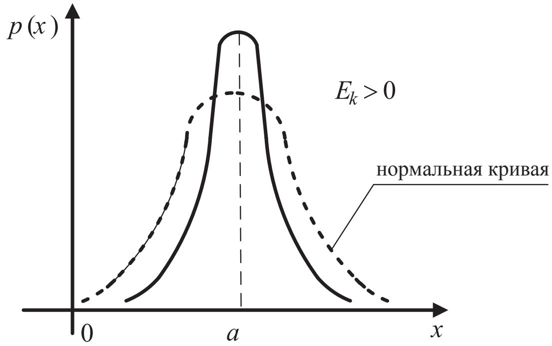
Название показателя	Определение	Пояснение
Медиана (M_e)	– Точка (иногда множество точек), при переходе через которую функция распределения $F(X)$ пересекает (скачком или непрерывно) значение 0,5: $F(M_e) \le 0{,}5$; $F(M_e + 0) \ge 0{,}5$; — точка, которая делит площадь подграфика плотности распределения вероятностей непрерывной случайной величины на две равные по площади части. Медиана определяется из условия $P(\xi < M_e) = P(\xi > M_e)$	

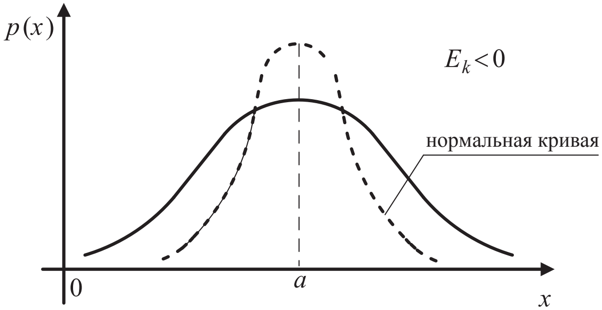
Сравнение с нормальным распределением	Пояснение
Для случайной величины, распределенной по нормальному закону, мода, медиана и математическое ожидание совпадают: $$M_0(\xi)=M_e(\xi)=M(\xi)=a.$$ *Замечание*. Этим свойством обладает любое унимодальное распределение, у которого график функции $p(x)$ имеет симметричную форму	

<table>
<tr><th>Название показателя</th><th>Определение</th><th>Пояснение</th></tr>
<tr>
<td>Асимметрия (A_s)</td>
<td>Асимметрия служит показателем несимметричности графика плотности распределения вероятностей случайной величины относительно моды (или математического ожидания), точнее — относительно прямой $x = M\xi$.
Формула для определения асимметрии:
$$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3},$$
где $\sigma = \sigma(\xi) = \sqrt{D\xi}$, а μ_3 — центральный момент третьего порядка, он находится по формуле $\mu_3 = M(\xi - M\xi)^3$.
Замечание. Величина μ_k называется центральным моментом k-го порядка случайной величины и находится по формуле $\mu_k = M(\xi - M\xi)^k$.
Согласно введенному понятию дисперсия случайной величины ξ является ее центральным моментом 2-го порядка:
$$D\xi = \mu_2 = M(\xi - M\xi)^2.$$
$$\sigma = \sigma(\xi) = \sqrt{\mu_2}$$</td>
<td>Если $A_s > 0$, то график плотности распределения вероятностей случайной величины «скошен вправо»


Если $A_s < 0$, то график плотности распределения вероятностей случайной величины «скошен влево»

</td>
</tr>
</table>

Сравнение с нормальным распределением	Пояснение
Для нормально распределенной случайной величины $A_s = 0$, так как ее график плотности распределения вероятностей (кривая Гаусса) симметричен относительно прямой $x = M\xi = a$	

Название показателя	Определение	Пояснение
Эксцесс (E_k)	Это показатель «крутизны» графика плотности распределения вероятностей случайной величины. Вычисляется эксцесс по формуле $$E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3,$$ где μ_4 — центральный момент четвертого порядка — находится по формуле $$\mu_4 = M(\xi - M\xi)^4$$	Если $E_k > 0$, то график плотности распределения вероятностей случайной величины идет «более круто», чем у нормально распределенной случайной величины с теми же параметрами $M(\xi) = a$, $\sigma(\xi) = \sigma$. 

<table>
<tr><th>Название показателя</th><th>Определение</th><th>Пояснение</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Если $E_k < 0$, то график плотности распределения вероятностей случайной величины идет «более полого» по сравнению с графиком нормально распределенной случайной величины с теми же параметрами $M(\xi) = a$, $\sigma(\xi) = \sigma$.

</td></tr>
<tr><td colspan="3">Сравнение с нормальным распределением
Для нормально распределенной случайной величины $E_k = 0$, так как для нее $\frac{\mu_4}{\sigma^4} = 3$</td></tr>
</table>

10. Понятие о законе больших чисел

Закон больших чисел — ряд теорем, устанавливающих условия, при выполнении которых среднее арифметическое достаточно большого числа случайных величин практически утрачивает случайный характер, т. е. становится практически неотличимым от некоторой константы.

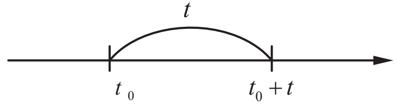
Название	Формулировка
Неравенство Чебышева	Доказательство теорем закона больших чисел основывается на неравенстве Чебышева, которое может быть представлено в двух видах. 1. $P(\lvert \xi - M(\xi) \rvert \geq \varepsilon) \leq \frac{D(\xi)}{\varepsilon^2}$. Рассматривая противоположное событие, получим второй вид неравенства Чебышева. 2. $P(\lvert \xi - M(\xi) \rvert < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(\xi)}{\varepsilon^2}$. Эти неравенства выполняются для любого положительного числа ε, как бы мало оно ни было, если случайная величина ξ имеет конечные математическое ожидание и дисперсию

Название закона	Формулировка закона
Теорема Чебышева	Пусть имеется последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ попарно независимых случайных величин, дисперсии которых равномерно ограничены (т. е. ограничены одной и той же константой): $$\forall i = \overline{1,\infty} \quad D(\xi_i) \le C,\ C = \text{const}.$$ Тогда для любого сколь угодно малого числа $\mu > 0$. $$\lim_{n\to\infty} P(\lvert \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M\xi_i \rvert < \varepsilon) = 1.$$ Смысл теоремы Чебышева состоит в том, что если имеется достаточно большое число попарно независимых случайных величин, дисперсии которых равномерно ограничены (т. е. ограничены одним и тем же постоянным числом C), то их среднее арифметическое практически всегда будет неотличимо от константы — среднего арифметического их математических ожиданий

Название закона	Формулировка закона
Теорема Бернулли	Рассматривается некоторое испытание, в котором $P(A) = p$. Его повторяют n раз. Пусть в проведенных n испытаниях событие A появилось m раз. Относительная частота появления события A: $$W(A) = \frac{m}{n}.$$ *Теорема* При достаточно большом числе испытаний относительная частота появления события практически всегда будет неотличима от вероятности появления этого события, т. е. для любого сколь угодно малого положительного числа ε $$\lim_{n\to\infty} P(\|\frac{m}{n} - p\| < \varepsilon) = 1.$$ Теорема Бернулли теоретически подтверждает наблюдаемое свойство устойчивости относительной частоты появления событий

11. Простейший поток событий

Название	Формула	Пояснение
Поток событий	–	Последовательность событий, которые наступают в случайные моменты времени
Простейший (пуассоновский) поток событий	–	Поток событий, обладающий следующими тремя свойствами: стационарностью, отсутствием последействия, ординарностью

Название	Формула	Пояснение
Характеризующий показатель	$P_t(k)$	Вероятность того, что в течение промежутка времени длительностью t произойдет ровно k событий
Стационарность	$P_t(k) = f(k;t)$	$P_t(k)$ не зависит от начала отсчета t_0 рассматриваемого промежутка времени, а зависит только от числа событий k и длительности t промежутка времени: 
Отсутствие последействия	–	$P_t(k)$ не зависит от того, что происходило до начала t_0 отсчета времени (происходили какие-либо события (и какие именно) или нет до момента t_0)
Ординарность	$\dfrac{P_{\Delta t}(k>1)}{P_{\Delta t}(k=1)} \underset{\Delta t \to 0}{\to} 0$	Вероятность того, что в течение малого промежутка времени Δt произойдет более одного события, пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью того, что в течение этого промежутка времени произойдет только одно событие
Формула Пуассона	$P_t(k) = \dfrac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$	λ — среднее число появлений событий за единицу времени (интенсивность потока событий, $\lambda > 0$). Если $\lambda = \text{const}$, то $P_t(k)$ для простейшего потока определяется формулой Пуассона

Примечание. Если поток событий представляет собой сумму очень большого числа независимых стационарных потоков, влияние каждого из которых на суммарный поток ничтожно мало, то суммарный поток при условии его ординарности будет весьма близким к простейшему потоку.

12. Функция надежности

Любое устройство независимо от его сложности будем называть элементом. Будем считать, что элемент начинает работать в момент времени t_0. Отказ представляет собой некоторое случайное событие.

Название	Формула	Пояснение
Функция распределения времени безотказной работы элемента	$F(t) = P(T < t)$	Случайная величина T — время безотказной работы элемента, $F(t)$ — вероятность того, что за время t работы элемента произойдет отказ элемента, т. е. что время T безотказной работы элемента будет меньше t
Вероятность противоположного события	$P(T \geq t) = 1 - P(T < t) = 1 - F(t)$	Вероятность того, что за время t работы элемента отказов элемента не будет
Функция надежности	$R(t) = P(T \geq t) = 1 - F(t)$	Функция, определяющая вероятность безотказной работы элемента в течение времени t

13. Показательный закон надежности

Название	Формула	Пояснение
Характеристическое свойство показательного закона надежности	–	Вероятность безотказной работы элемента в течение времени t не зависит от времени предшествующей работы этого элемента. Рассмотренным свойством обладает только показательное распределение. Поэтому, если на практике установлено, что случайная величина обладает таким свойством, это значит, что она имеет показательное распределение
Плотность распределения времени T безотказной работы элемента	$p(t)=\begin{cases}0 & \text{при } t<0,\\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{при } t\geq 0.\end{cases}$ $\lambda=\text{const},\quad \lambda>0$	Случайная величина T — время безотказной работы элемента, λ — интенсивность потока отказов (сбоев) элемента, $p(t)$ — плотность распределения вероятностей случайной величины T
Функция распределения времени безотказной работы элемента	$F(t)=\begin{cases}0 & \text{при } t<0,\\ 1-e^{-\lambda t} & \text{при } t\geq 0.\end{cases}$ $\lambda=\text{const},\quad \lambda>0$	Функция распределения случайной величины T — времени безотказной работы элемента определенного типа. Случайная величина T имеет показательное распределение с параметром λ
Показательный закон надежности	$R(t)=e^{-\lambda t},$ $R(t)=P_t(0)=$ $=\dfrac{(\lambda t)^0}{0!}e^{-\lambda t}=e^{-\lambda t}$	λ — интенсивность отказов данного типа элементов (среднее число отказов за единицу времени), $\lambda=\text{const}$, $\lambda>0$. Отказы представляют собой простейший поток случайных событий. $R(t)$ — функция надежности работы элементов определенного типа

Раздел 3. **Иллюстрирующие примеры**

Действия с событиями

Пример 1. Стрелок производит три выстрела по мишени. Событие A_k — попадание в мишень при k-ом выстреле ($k = 1, 2, 3$). Выразить через A_1, A_2, A_3 следующие события: A — хотя бы одно попадание; B — три попадания; C — три промаха; D — хотя бы один промах; E — не менее двух попаданий; F — не более одного попадания; G — попадание после первого выстрела; H — попадание после второго выстрела; I — попадание до третьего выстрела; J — только одно попадание; K — менее трех попаданий; L — только два попадания; M — хотя бы два попадания; N — более одного попадания.

Решение.

1) $A = A_1 + A_2 + A_3;$

2) $B = A_1 A_2 A_3;$

3) $C = \overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3;$

4) $D = \overline{A_1} + \overline{A_2} + \overline{A_3};$

5) $E = A_1 A_2 + A_1 A_3 + A_2 A_3;$

6) $F = \overline{A}_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \overline{A}_2;$

7) $G = \overline{A_1}(A_2 + A_3);$

8) $H = \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3;$

9) $I = A_1 + A_2;$

10) $J = A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3;$

11) $K = \overline{A_1 A_2 A_3} = D;$

12) $L = A_1 A_2 \overline{A_3} + A_1 \overline{A_2} A_3 + \overline{A_1} A_2 A_3;$

13) $M = A_1 A_2 + A_1 A_3 + A_2 A_3 = E;$

14) $N = M = E = L + B.$

Классическое определение вероятности

Пример 2. На полке магазина стоят 20 банок мясных консервов, из них 4 банки — с просроченным сроком годности. Какова вероятность, что покупатель, взяв наугад одну банку, выберет банку с просроченным сроком годности?

Решение. Число n всех возможных исходов опыта равно 20. Событие A — покупатель выбрал банку с просроченным сроком годности. Число m исходов, благоприятствующих появлению события A, равно 4. Итак, $m=4, n=20$. Все исходы опыта несовместны, равновозможны, элементарны и составляют полную группу. Возможно использование классического определения вероятности: $P(A)=\frac{m}{n}$.

Следовательно, $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}=0,2.$

Пример 3. Какова вероятность получить два туза, взяв наугад две карты из колоды в 36 карт?

Решение. Число всех элементарных, равновозможных и несовместных исходов опыта равно числу способов выбора двух карт из множества в 36 карт: $n=C_{36}^2=\frac{36!}{2!34!}=\frac{36\cdot 35}{2}=18\cdot 35.$ $C_{36}^2=\frac{36!}{2!34!}=\frac{36x36}{2}=18x35.$ Число благоприятных исходов равно числу способов выбора двух тузов из четырех возможных: $m=C_4^2=\frac{4!}{2!2!}=\frac{4\cdot 3}{2}=6.$

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{6}{18\cdot 35}=\frac{1}{3\cdot 35}=\frac{1}{105}.$$

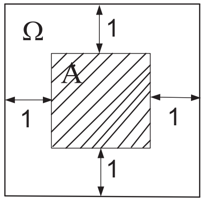
Геометрическое определение вероятности

Пример 4. На шахматную доску с размером клетки 5×5 см^2 брошена монета диаметром 2 см. Какова вероятность, что монета попадет внутрь клетки, т. е. не пересечет ее границу?

Решение. Будем рассматривать положение центра монеты. При любом исходе опыта он попадет или внутрь клетки, или на ее границы. Следовательно, полная группа несовместных элементарных и равновозможных исходов опыта представляет собой множество Ω всех точек квадрата размером 5×5 (клетку шахматной доски). Чтобы монета не пересекла границы клетки, ее центр должен отстоять от этих границ внутрь клетки на величину, не меньшую чем радиус монеты. Значит, множество A всех благоприятных исходов опыта представляет собой квадрат размером 3×3 (отступает на 1 см внутрь от каждой границы квадрата 5×5**)**. Согласно геометрическому определению вероятности, отношение мер множеств A и Ω является вероятностью искомого события, то есть:

$$P(A) = \frac{mesA}{mes\Omega} = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{3\cdot 3}{5\cdot 5} = \frac{9}{25},$$

где $mes\,A$ — мера множества A (множества благоприятных исходов, равная площади квадрата A) $mes\,\Omega$ — мера множества Ω (множества всех возможных исходов опыта, равная площади квадрата Ω (клетки шахматной доски)).



Статистическое определение вероятности

Пример 5. По данным социологического опроса $\frac{2}{3}$ студентов половину своего свободного времени проводят, общаясь с друзьями по интернету. Какова вероятность, что из двух наудачу выбранных студентов хотя бы один половину своего свободного времени проводит, общаясь с друзьями по интернету?

Решение. Событие A — половину своего свободного времени студент проводит, общаясь с друзьями по интернету. Относительная частота события A по данным опроса $W(A)=\frac{2}{3}$; по статистическому определению вероятности эту частоту примем за вероятность события A: $P(A)=W(A)=\frac{2}{3}$. Тогда $P(\bar{A})=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$,

$$P(A_1+A_2)=1-P(\bar{A}_1\bar{A}_2)=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)=1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9},$$

или

$$P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1)P(A_2)=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}-\frac{4}{9}=\frac{12-4}{9}=\frac{8}{9}.$$

Здесь событие A_i — i-й студент проводит половину своего свободного времени, общаясь с друзьями по интернету, $i=1,\ 2$. События A_1 и A_2, очевидно, независимы.

Аксиоматическое определение вероятности

Пример 6. На фальсифицированной игральной кости со смещенным центром тяжести шесть очков выпадает в два раза чаще, чем одно очко, и в полтора раза чаще, чем два, три, четыре и пять очков. Какова вероятность, что при двукратном бросании этой кости сумма выпавших очков будет равна десяти?

Решение. Найдем распределение вероятностей на пространстве элементарных исходов опыта: $\Omega\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}=$. По условию, $P_6 = P(\omega_6) = 2P_1$ и $P_6 = 1{,}5P_i \quad (i = 2,\ 3,\ 4,\ 5)$.

$$P(\Omega) = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = 1;\ P_1 = \frac{1}{2}P_6;\ \ P_i = \frac{2}{3}P_6 \ \ (i = 2,\ 3,\ 4,\ 5) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}P_6 + \frac{2}{3}\cdot 4P_6 + P_6 = 1 \ \Rightarrow\ \frac{3}{2}P_6 + \frac{8}{3}\cdot P_6 = \frac{9+16}{6}P_6 = 1 \ \Rightarrow\ \frac{25}{6}P_6 = 1 \ \Rightarrow\ P_6 = \frac{6}{25};$$

$$P_1 = \frac{3}{25};\ P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = \frac{4}{25}.$$

$$A = \omega_4\omega_6 + \omega_5\omega_5 + \omega_6\omega_4\,;$$

$$P(A) = P_4P_6 + P_5P_5 + P_6P_4 = \frac{4}{25}\cdot\frac{6}{25} + \frac{4}{25}\cdot\frac{4}{25} + \frac{6}{25}\cdot\frac{4}{25} = \frac{48+16}{625} = \frac{64}{625} \approx 0{,}1.$$

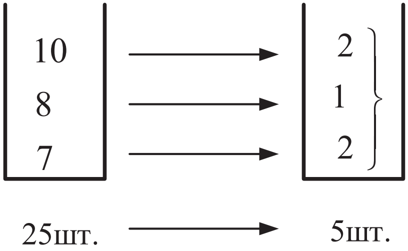
Для нефальсифицированной кости вероятность этого же события будет равна

$$P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \approx 0{,}08.$$

Применение формул комбинаторики. «Схема урн»

Пример 7. В коробке 25 шоколадных конфет. Из них 10 — с вишневой начинкой, 8 — с апельсиновой, 7 — с лимонной. Наудачу из коробки взяли 5 конфет. Какова вероятность, что 2 из них с вишневой начинкой, 1 — с апельсиновой и 2 — с лимонной?

Решение. Применяем классическое определение вероятности в сочетании с формулами комбинаторики. $P(A)$ — вероятность искомого события: $P(A)=\dfrac{m}{n}$, где n — общее число возможных исходов. Его находим как число сочетаний из 25 по 5: $n=C_{25}^{5}$. Число m благоприятных исходов находим как произведение числа сочетаний из 10 по 2 (возможные способы выбора 2-х конфет из 10 с вишневой начинкой) на число сочетаний из 8 по 1 (возможные способы выбора 1 конфеты из 8 с апельсиновой начинкой) и на число сочетаний из 7 по 2 (способы выбора 2-х конфет из 7 с лимонной начинкой):



$$m=C_{10}^{2}\cdot C_{8}^{1}\cdot C_{7}^{2};$$

$$n=C_{25}^{5}.$$

$$C_{10}^2=\frac{10!}{2!8!}=\frac{10\cdot 9}{2}=45;\quad C_8^1=\frac{8!}{1!7!}=8;\quad C_7^2=\frac{7!}{2!5!}=21.$$

$$m=45\cdot 8\cdot 21;\quad n=C_{25}^5=\frac{25!}{5!20!}=\frac{25\cdot 24\cdot 23\cdot 22\cdot 21}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}=5\cdot 23\cdot 22\cdot 21.$$

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{45\cdot 8\cdot 21}{5\cdot 23\cdot 22\cdot 21}=\frac{9\cdot 4}{23\cdot 11}=\frac{36}{253}\approx 0{,}142.$$

Условная вероятность

Пример 8. В группе студентов 10 юношей и 15 девушек. Среди них 5 спортсменов, причем двое из них — девушки. Какова вероятность, что выбранный наудачу из группы студент является спортсменом, если стало известно, что была выбрана девушка?

Решение. Пусть событие A — выбран спортсмен, событие B — выбрана девушка. Тогда событие AB — выбрана девушка-спортсменка. $P(A|B)$ — вероятность того, что выбранный наудачу студент является спортсменом, при условии, что была выбрана девушка.

$$P(AB)=\frac{m}{n}=\frac{|AB|}{|\Omega|}=\frac{2}{25}.$$

Здесь $m=|AB|$ — число девушек-спортсменок в группе, $n=|\Omega|$ — общее число студентов группе: $m=2, n=10+15=25$. $P(B)=\frac{m_1}{n}=\frac{|B|}{|\Omega|}=\frac{15}{25}$, где $m_1=|B|$ — число девушек в группе. Тогда

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{2/25}{15/25} = \frac{2 \cdot 25}{25 \cdot 15} = \frac{2}{15}.$$

Этот же результат можно, очевидно, получить и непосредственным применением классического определения вероятности:

$$P(A|B) = \frac{m}{m_1} = \frac{2}{15}.$$

Теоремы сложения и умножения вероятностей

Пример 9. В делегации, состоящей из 20 человек, иностранными языками владеет 16 человек. Английским языком владеют 8 человек, французским — 5, немецким — 6 человек. Среди знающих английский или французский язык трое владеют и тем и другим языком. Владеющие немецким языком не знают английского и французского. Найти вероятности того, что выбранный наудачу из делегации человек:

а) знает английский или французский язык;

б) знает английский или немецкий язык;

в) владеет хотя бы одним из двух языков — немецким или французским;

г) говорит по крайней мере на одном из этих трех иностранных языков.

Решение. Введем обозначение событий: A — человек владеет английским языком, B — человек владеет французским языком, C — человек владеет немецким языком. Тогда события, обозначающие, что человек владеет хотя бы одним из двух иностранных языков, будут записаны так:

- $A + B$ — человек владеет английским или французским языком (или тем и другим);
- $A + C$ — человек знает английский или немецкий язык (или тот и другой);
- $B + C$ — человек владеет французским или немецким языком (или тем и другим).

Событие, заключающиеся в том, что человек владеет хотя бы одним из этих трех языков, формально запишется как $A + B + C$.

Владение сразу несколькими языками обозначаются следующим образом:

- AB — человек знает английский и французский язык;
- AC — человек знает английский и немецкий язык;
- BC — человек знает французский и немецкий язык;
- ABC — человек владеет английским, французским и немецким языками, т. е. всеми тремя языками.

Найдем вероятности указанных событий. По классическому определению вероятности

$$P(A)=\frac{8}{20}=0,4;\ P(B)=\frac{5}{20}=0,25;\ P(C)=\frac{6}{20}=0,3;$$

$$P(AB)=\frac{3}{20}=0,15;\ P(AC)=0;\ P(BC)=0;\ P(ABC)=0.$$

Воспользуемся теоремой сложения вероятностей.

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0,4+0,25-0,15=0,5.$$

Поскольку события A и B совместны, то необходимо пользоваться общей формулой теоремы сложения вероятностей.

События A и C, а также события B и C по условию несовместимы, значит, можно воспользоваться частным случаем теоремы сложения:

$$P(\underbrace{A+C}_{\text{несовместны}})=P(A)+P(C)=0,4+0,3=0,7.$$

$$P(\underbrace{B+C}_{\text{несовместны}})=P(B)+P(C)=0,25+0,3=0,55.$$

Найти вероятность того, что человек говорит хотя бы на одном из указанных трех иностранных языков, можно двумя способами:

1) используя общий случай теоремы сложения для трех событий:

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)=$$
$$=0,4+0,25+0,3-0,15-0-0+0=0,8;$$

2) через вероятность противоположного события:

$$P(A+B+C)=1-P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=1-\frac{4}{20}=1-0,2=0,8.$$

Здесь $\overline{A+B+C}=\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ – это означает, что человек не владеет ни английским, ни французским, ни немецким языком. Таких в делегации 4 человека.

Пример 10. Для некоторой местности среднее число пасмурных дней в июне равно пяти. Найти вероятность того, что 7-го и 9-го июня будет ясная погода.

Решение. Рассмотрим события A_1–7-го июня будет ясная погода и 9-го июня будет ясная погода. Тогда событие состоит в том, что и 7-го и 9-го июня будет ясная погода. Таким образом, требуется найти $P(A_1A_2)$ — вероятность такого события. Поскольку количество ясных дней (в среднем) в июне ограничено, то появление события (7-го июня ясная погода) меняет вероятность появления события A_2 (9-го июня ясная погода). Следовательно, события и A_2 зависимы. Значит, нужно применить общую формулу теоремы умножения вероятностей: $P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1)$. Число дней в июне равно 30. Из них ясных дней (в среднем) 30–5 = 25. Тогда $P(A_1) = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$. Вероятность того, что 9-го июня будет ясная погода, при условии, что 7-го числа была ясная погода: $P(A_2|A_1) = \frac{24}{29}$ (нам известно, что 7-го числа была ясная погода, значит осталось 24 ясных дня на оставшиеся 29 дней). Итак,

$$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) = \frac{5}{6} \cdot \frac{24}{29} = \frac{20}{29}.$$

Пример 11. Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,38. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым из орудий, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,8. Найти вероятность поражения цели при одном залпе обоими орудиями.

Решение. Обозначим события: A_1 — поражение цели первым орудием, A_2 — поражение цели вторым орудием при одном выстреле каждым из орудий. Вероятность события A_1 (т. е. $P(A_1)$) нам неизвестна, и ее надо найти. $P(A_2) = 0,8$ по условию. Поражение цели одним из этих двух орудий не меняет вероятности поражения цели другим орудием, следовательно, события A_1 и A_2 независимы, а значит, независимыми будут события A_1 и $\bar{A}_2$, а также события $\bar{A}_1$ и A_2 Значит, $P(A_1\bar{A}_2) = P(A_1)P(\bar{A}_2)$, $P(\bar{A}_1A_2) = P(\bar{A}_1)P(A_2)$ (применяем теорему умножения в ее частном случае для двух независимых событий). Тогда вероятность того, что при залпе из двух орудий произошло только одно попадание, можно записать следующим образом:

$$P(A_1\overline{A}_2+\overline{A}_1A_2)=P(A_1)P(\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1)P(A_2).$$

По условию, она равна 0,38. Обозначим неизвестную нам вероятность $P(A_1) = p$. Тогда $P(\overline{A}_1)=1-p$. $P(A_2) = 0,8$; $P(\overline{A}_2) = 1 - P(A_2) = 1 - 0,8 = 0,2$. Отсюда

$$P(A_1\overline{A}_2+\overline{A}_1A_2)=p\cdot 0,2+(1-p)\cdot 0,8=0,38. \ \Rightarrow$$

$$0,2p+0,8-0,8p=0,38 \ \Rightarrow 0,6p=0,42 \ \Rightarrow p=0,7.$$

Итак,

$$P(A_1)=0,7. \quad P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)=0,7\cdot 0,8=0,56.$$

Формула полной вероятности и формула Байеса (формула проверки гипотез)

Пример 12. На склад поступают изделия с трех предприятий:
— с 1-го предприятия — 300 изделий;
— со 2-го предприятия — 200 изделий;
— с 3-го предприятия — 500 изделий.
Известно, что:
1-е предприятие выпускает 3% брака,
2-е предприятие выпускает 10% брака,
3-е предприятие выпускает 2% брака.

Определить вероятности того, что взятое наудачу и оказавшееся бракованным изделие изготовлено 1-м, 2-м и 3-м предприятием.

Решение. Событие A заключается в том, что взятое наудачу изделие оказалось бракованным.

Рассмотрим гипотезы:

1) H_1 — взятое изделие изготовлено первым предприятием;

2) H_2 — взятое изделие изготовлено вторым предприятием;

3) H_3 — взятое изделие изготовлено третьим предприятием.

Событие A может наступить только вместе с одной из этих гипотез. Гипотезы несовместны. Найдем вероятность наступления события A:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i)P(A|H_i) =$$

$$= P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3). \qquad (*)$$

Определим вероятности гипотез и условные вероятности события A:

$$P(H_1) = \frac{300}{1000} = 0,3; \qquad P(H_2) = \frac{200}{1000} = 0,2; \qquad P(H_3) = \frac{500}{1000} = 0,5;$$

$$P(A|H_1) = 0,03; \qquad P(A|H_2) = 0,1; \qquad P(A|H_3) = 0,02.$$

Полную вероятность события A найдем по формуле (*):

$$P(A) = 0,3 \cdot 0,03 + 0,2 \cdot 0,1 + 0,5 \cdot 0,02 = 0,039.$$

Предположим, что взятая наугад деталь оказалась бракованной, т. е. событие A произошло. Тогда можно проверить гипотезы и переоценить их вероятности при условии, что событие A произошло:

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(H_1)P(A \mid H_1)}{P(A)} = \frac{0,3 \cdot 0,03}{0,039} = \frac{9}{39},$$

$$P(H_2 \mid A) = \frac{P(H_2)P(A \mid H_2)}{P(A)} = \frac{0,2 \cdot 0,1}{0,039} = \frac{20}{39},$$

$$P(H_3 \mid A) = \frac{P(H_3)P(A \mid H_3)}{P(A)} = \frac{0,5 \cdot 0,02}{0,039} = \frac{10}{39}.$$

Следовательно, вероятнее всего, что взятое бракованное изделие изготовлено вторым предприятием, несмотря на то, что изделий с этого предприятия поступило на склад меньше всего.

Формула Бернулли. Асимптотические формулы в схеме испытаний Бернулли

Пример 13. Сигнализатор состоит из трех блоков. Он срабатывает, если хотя бы один из блоков подает сигнал. Вероятность того, что в случае аварии блок подаст сигнал, равна 0,8 для каждого блока. Найти вероятность того, что в случае аварии сигнализатор сработает.

Решение. Событие A — блок подаст сигнал.

$P(A) = p = 0,8$, $P(\bar{A}) = q = 1 - p = 0,2$, $n = 3$, т. е. у нас имеется n испытаний независимых и однородных.

Воспользуемся формулой Бернулли (вероятность того, что в n испытаниях событие A произойдет ровно m раз):

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

$P_3(m \geq 1) = P_3(1) + P_3(2) + P_3(3)$ — вероятность того, что сигнализатор сработает, т. е. что хотя бы один блок подаст сигнал (m — число появлений события A).

Это значит, что сигнал подаст либо один из блоков, либо какие-нибудь два, либо все три:

$$P_3(m \geq 1) = P_3(1 \leq m \leq 3) = C_3^1 pq^2 + C_3^2 p^2 q + C_3^3 p^3 q^0 =$$
$$= 3 \cdot 0,8 \cdot 0,2^2 + 3 \cdot 0,8^2 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,8^3 \cdot 0,2^0 =$$
$$= 3 \cdot 0,8 \cdot 0,04 + 3 \cdot 0,64 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,512 \cdot 1 = 0,992.$$

Локальная теорема Муавра — Лапласа

Пример 14. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена ровно 75 раз.

Решение. Имеем дело с независимыми испытаниями по схеме Бернулли. Число испытаний велико: $n = 100$. Вероятность появления событий в каждом испытании постоянна: $p = 0,8$ и $0,1 \leq p \leq 0,9$. Нужно найти $P_{100}(75)$. В данном случае вместо формулы Бернулли следует использовать локальную формулу Муавра — Лапласа, т. к. условия задачи удовлетворяют локальной теореме Муавра — Лапласа:

$$P_{100}(75) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}.$$

В нашем случае $n=100,\ m=75,\ \ p=0{,}8$. Следовательно, $np=80$, $q=0{,}2$, $npq=16$, $\sqrt{npq}=4$.

Тогда $x=\dfrac{75-80}{\sqrt{16}}=-\dfrac{5}{4}=-1{,}25.$

По таблице значений функции $\varphi(x)$ (см. прил. 3) находим $\varphi(-1{,}25)=\varphi(1{,}25)=0{,}1826$. Далее находим приближенное значение искомой вероятности:

$$P_{100}(75)\approx\frac{1}{4}\cdot 0{,}1826=0{,}04565.$$

Было использовано свойство четности функции $\varphi(x)$: $\varphi(-x)=\varphi(x)$.

Интегральная теорема Муавра — Лапласа

Пример 15. В партии из 768 арбузов каждый арбуз оказывается неспелым с вероятностью 0,25. Найти вероятность того, что количество спелых арбузов будет находиться в пределах от 564 до 600.

Решение. Условия задачи удовлетворяют требованиям интегральной теоремы Муавра — Лапласа. Значит, можно использовать асимптотическую формулу:

$$P_n(m_1\le m\le m_2)\approx\Phi(x'')-\Phi(x'),\ \text{где}\quad x'=\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}},\ x''=\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}.$$

В нашем случае $n=768,\ m_1=564,\ m_2=600,\ q=0{,}25.$

Тогда $p=1-q=0,75,\ np=576,\ npq=144,\ \sqrt{npq}=12;\ x'=\dfrac{564-576}{12}=-1,\ x''=\dfrac{600-576}{12}=2.$

$$P_{768}(564\le m\le 600)\approx \Phi(2)-\Phi(-1)=\Phi(2)+\Phi(1)=0,4772+0,3413=0,8185.$$

Значение функции Лапласа $\Phi(x)$ при $x=2$ и при $x=1$ находим по таблице (см. прил. 4). Использовано также свойство нечетности функции Лапласа: $\Phi(-x)=-\Phi(x)$.

Теорема Пуассона

Пример 16. Вероятность прокола шины при пробеге машины в 1000 км равна 0,05. Какова вероятность получить 3 прокола при пробеге 100000 км?

Решение. У нас число испытаний n = 100 (100 раз по 1000 км). Вероятность прокола шины достаточно мала — p = 0,05. Для подсчета вероятности воспользуемся теоремой Пуассона:

$$\lambda\approx np=100\cdot 0,05=5,\quad m=3.$$

$$P_{100}(3)\approx\frac{5^3}{3!}e^{-5}\approx\frac{125}{6}\cdot 0,00674\approx 0,14.$$

Наивероятнейшее число появлений события в схеме Бернулли

Пример 17. Два стрелка вместе залпами стреляют по мишени. Вероятность промаха первого стрелка равна 0,2, промаха второго — 0,4. Найти наивероятнейшее число непоражения мишени при 25 залпах.

Решение. Обозначим $q_1 = 0,2;\ q_2 = 0,4;$ A — непоражение мишени при залпе.

$$P(A) = q_1 q_2 = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08 = p;\ n = 25,\quad p = 0,08,\quad q = 0,92.$$

$$np - q \le m_0 < np + p,$$

$$np = 25 \cdot 0,08 = 2 - \text{целое число} \ \Rightarrow m_0 = 2$$

$$(np - q = 2 - 0,92 = 1,08;\ np + p = 2 + 0,08 = 2,08).$$

Вероятнее всего, два залпа будут такие, что ни один из стрелков не поразит мишень.

Полиномиальная схема испытаний

Пример 18. Игральная кость подбрасывается 10 раз. Найдем вероятность того, что при этом 2 очка выпадут 4 раза, 3 очка выпадут 1 раз, 5 очков выпадут 3 раза и 6 очков выпадут 2 раза.

Решение. Возможные исходы каждого испытания (каждого подбрасывания кости): появление одного (A_1), двух (A_2), трех (A_3), четырех (A_4), пяти (A_5) и шести (A_6) очков. Все эти исходы равновозможны, поэтому их вероятности равны.

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = \frac{1}{6}, \text{ число испытаний } n = 10.$$

Найдем искомую вероятность:

$$P_{10}(0,4,1,0,3,2) = \frac{10!}{0!4!1!0!3!2!}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)^2 =$$

$$= \frac{10!}{4!3!2!}\left(\frac{1}{6}\right)^{10} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1}\left(\frac{1}{6}\right)^{10} = \frac{25\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{6^{10}} = \frac{25\cdot 2\cdot 7}{6^8} =$$

$$= \frac{25\cdot 7}{3\cdot 6^7} = 0,000208.$$

Искомая вероятность равна 0,000208, т. е. практически равна нулю.

Функция распределения дискретной случайной величины

Пример 19. Рассмотрим дискретную случайную величину, заданную следующим рядом распределения:

ξ	-2	0	1	3
p_i	0,1	0,2	0,4	0,3

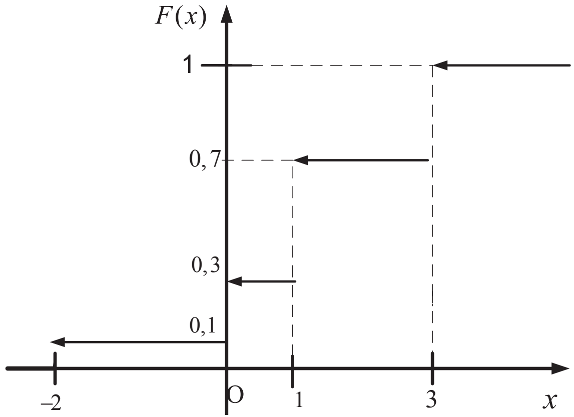
$$\sum p_i = 1.$$

Найти функцию распределения этой случайной величины. Построить график найденной функции. Найти вероятность того, что случайная величина примет значение на отрезке [–1; 2].

Решение. Найдем ее функцию распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le -2,\\ 0{,}1 & \text{при } -2<x\le 0,\\ 0{,}3 & \text{при } 0<x\le 1,\\ 0{,}7 & \text{при } 1<x\le 3,\\ 1 & \text{при } x>3.\end{cases}$$

Построим график этой функции:



Найдем вероятность того, что случайная величина примет значение, не меньшее, чем минус единица, но и не большее, чем два: $P(-1 \le \xi \le 2)$.

Значение $P(-1 \le \xi \le 2)$ можно найти двумя способами:

1) по формуле:

$$P(a \le \xi \le b) = F(b+0) - F(a),$$

так как в точке $x = 2$ функция $F(x)$ непрерывна, то $F(2+0) = F(2)$ и

$$P(-1 \le \xi \le 2) = F(2) - F(-1) = 0,7 - 0,1 = 0,6;$$

2) рассмотрев те значения случайной величины, которые попадают в указанный промежуток:

$$P(-1 \le \xi \le 2) = P((\xi = 0) + (\xi = 1)) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) =$$
$$= 0,2 + 0,4 = 0,6.$$

В отрезок [–1; 2] попадают только два возможных значения случайной величины ξ: 0 и 1. Значит, попасть в этот промежуток она может только в двух случаях: или она примет значение ноль, что происходит с вероятностью 0,2, или она примет значение, равное единице, что происходит с вероятностью 0,4. Эти события несовместны, и поэтому вероятность того, что произойдет хотя бы одно из них, равна сумме вероятностей этих событий.

Числовые характеристики дискретных случайных величин

Пример 20. Даны две случайные величины ξ и η. Найдем их математические ожидания:

ξ	-1	0	1
p_i	0,3	0,4	0,3

$$M\xi = -1\cdot 0,3 + 0\cdot 0,4 + 1\cdot 0,3 = 0.$$

η	-100	0	100
p_i	0,3	0,4	0,3

$$M\eta = -100\cdot 0,3 + 0\cdot 0,4 + 100\cdot 0,3 = 0.$$

$$M\xi = 0,\ M\eta = 0.$$

Возьмем еще одну случайную величину:

ζ	-1	0	1
p_i	0,1	0,5	0,4

Для нее математическое ожидание

$$M\zeta = -1\cdot 0,1 + 0\cdot 0,5 + 1\cdot 0,4 = -0,1 + 0,4 = 0,3.$$

Найдем дисперсии этих случайных величин, предварительно определив математические ожидания их квадратов. Вычислим также их среднеквадратические отклонения.

$$M(\xi^2)=(-1)^2\cdot 0,3+0^2\cdot 0,4+1^2\cdot 0,3=0,3+0,3=0,6,$$

$$D(\xi)=M(\xi^2)-(M\xi)^2=0,6-0^2=0,6,$$

$$\sigma(\xi)=\sqrt{D(\xi)}=\sqrt{0,6}\approx 0,77.$$

$$M(\eta^2)=(-100)^2\cdot 0,3+0^2\cdot 0,4+100^2\cdot 0,3=3000+3000=6000,$$

$$D(\eta)=M(\eta^2)-(M\eta)^2=6000-0^2=6000,$$

$$\sigma(\eta)=\sqrt{D(\eta)}=\sqrt{6000}\approx 77,46.$$

$$M(\zeta^2)=(-1)^2\cdot 0,1+0^2\cdot 0,5+1^2\cdot 0,4=0,1+0,4=0,5,$$

$$D(\zeta)=M(\zeta^2)-(M\zeta)^2=0,5-(0,3)^2=0,5-0,09=0,41,$$

$$\sigma(\zeta)=\sqrt{D(\zeta)}=\sqrt{0,41}\approx 0,64.$$

Сравнив полученные числовые характеристики случайных величин, мы видим, что величины ξ и η, имея одинаковое среднее значение, равное нулю, существенно отличаются средним разбросом своих значений, а случайные величины ξ и ζ при примерно одинаковом разбросе имеют различные средние значения:

$$M\xi=0,\qquad \sigma(\xi)\approx 0,77,$$

$$M\eta=0,\qquad \sigma(\eta)\approx 77,46,$$

$$M\zeta=0,3,\qquad \sigma(\zeta)\approx 0,64.$$

Функция распределения непрерывной случайной величины

Пример 21. Случайная величина задана плотностью распределения вероятностей:

$$p(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ a\cos x & \text{при } 0\le x\le \dfrac{\pi}{2},\\ 0 & \text{при } x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Найти a, $F(x)$, $P\left(\dfrac{\pi}{4}<\xi<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Решение. 1. Параметр a найдем из соотношения $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)=1.$

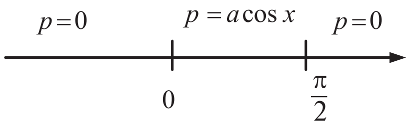
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{0} 0dx+\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} a\cos xdx+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} 0dx=a\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=a\sin x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=a(\sin(\frac{\grave{A}}{2})-\sin 0)=a(1-0)=a=1 \;\Rightarrow\; a=1.$$

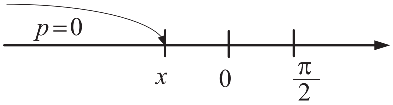
2. Найдем функцию распределения случайной величины

$$F(x)=P(\xi<x)=\int\limits_{-\infty}^{x} p(x)dx.$$

Рассмотрим три случая:

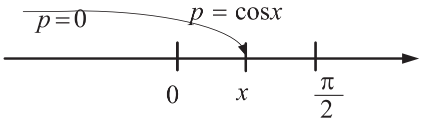


1) $x < 0$:



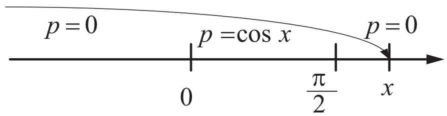
$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} p(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{x} 0dt=0;$$

2) $0 \le x \le \frac{\text{À}}{2}$:



$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} p(t)dt=\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{0} 0dt}_{=0}+\int\limits_{0}^{x}\cos t dt=\sin t\Big|_{0}^{x}=\sin x-\sin 0=\sin x;$$

3) $x > \frac{\pi}{2}$:



$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0dt}_{=0} + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt + \underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} 0dt}_{=0} =$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt = \sin t \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1.$$

Окончательно получили:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \sin x & \text{при } 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{при } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Можно проверить: $p(x) = F'(x)$.

График плотности распределения вероятностей $p(x)$:

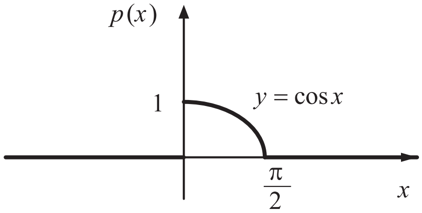
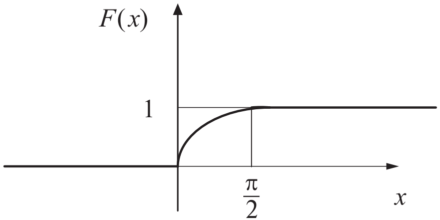


График функции распределения $F(x)$:



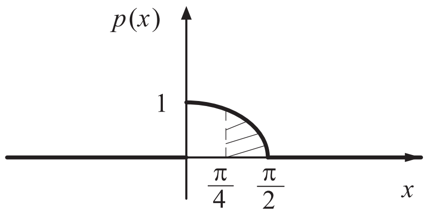
Вероятность попадания случайной величины ξ в интервал $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ найдем двумя способами:

$$\text{а)}\ P(\frac{\pi}{4}<\xi<\frac{\pi}{2})=P(\frac{\pi}{4}\le\xi<\frac{\pi}{2})=F(\frac{\pi}{2})-F(\frac{\pi}{4})=$$

$$=\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{4}=1-\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\text{б)}\ P(\frac{\pi}{4}<\xi<\frac{\pi}{2})=P(\frac{\pi}{4}\le\xi\le\frac{\pi}{2})=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=\sin x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{4}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$



Числовые характеристики непрерывной случайной величины

Пример 22. Пусть непрерывная случайная величина задана плотностью распределения вероятностей:

$$p(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<0, \\ \cos x & \text{при } 0\le x\le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{при } x>\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти $M(\xi)$, $D(\xi)$, $\sigma(\xi)$.

Решение.

Воспользуемся методом интегрирования по частям:

$$M(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx=\left[\begin{array}{l} u=x \\ du=dx \\ dv=\cos x dx \\ v=\int \cos x dx=\sin x \end{array}\right]=$$

$$=x\sin x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=\frac{\pi}{2}+\cos x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1\approx 0,57.$$

Для отыскания дисперсии предварительно найдем $M(\xi^2)$:

$$M(\xi^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x dx=\begin{bmatrix} u=x^2 \\ du=2xdx \\ dv=\cos xdx \\ v=\int\cos xdx=\sin x \end{bmatrix}=$$

$$=x^2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin xdx=(\frac{\pi}{2})^2-2(-x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx)=$$

$$=\frac{\pi^2}{4}-2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}-2.$$

$$D(\xi)=M(\xi^2)-(M\xi)^2=\frac{\pi^2}{4}-2-(\frac{\pi}{2}-1)^2=\frac{\pi^2}{4}-2-\frac{\pi^2}{4}+$$

$$+2\frac{\pi}{2}-1=\pi-3\approx 0{,}14.$$

$$\sigma(\xi)=\sqrt{D(\xi)}=\sqrt{\pi-3}\approx 0{,}37.$$

Пример 23. Пусть непрерывная случайная величина задана своей функцией распределения (интегральной функцией) $F(x)$:

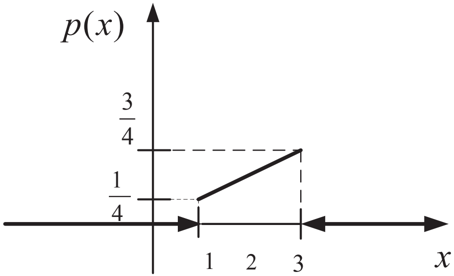
$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<1, \\ \dfrac{x^2-1}{8} & \text{при } 1\le x\le 3, \\ 1 & \text{при } x>3. \end{cases}$$

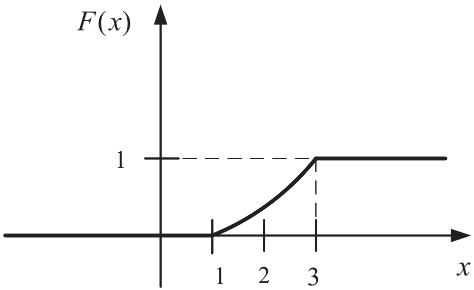
Найти $M\xi$, $D\xi$, $\sigma(\xi)$, $P(0<\xi\le 2)$.

Решение. $p(x)=F'(x)$ по свойству плотности распределения вероятностей (дифференциальной функции распределения). Найдем $p(x)$:

$$p(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<1, \\ \dfrac{x}{4} & \text{при } 1\le x\le 3, \\ 0 & \text{при } x>3. \end{cases}$$

Построим графики функций $p(x)$ и $F(x)$:





Найдем числовые характеристики случайной величины.

$$M(\xi)=\int_1^3 x\frac{x}{4}dx=\frac{1}{4}\int_1^3 x^2dx=\frac{1}{4}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_1^3=\frac{9}{4}-\frac{1}{12}=\frac{26}{12}=\frac{13}{6}.$$

$$M(\xi^2)=\int_1^3 x^2\frac{x}{4}dx=\frac{1}{4}\int_1^3 x^3dx=\frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_1^3=\frac{81}{16}-\frac{1}{16}=\frac{80}{16}=5,$$

$$D(\xi)=M(\xi^2)-(M\xi)^2=5-\left(\frac{13}{6}\right)^2=5-\frac{169}{36}=\frac{11}{36},$$

$$\sigma(\xi)=\sqrt{D\xi}=\sqrt{\frac{11}{36}}\approx 0,55.$$

Найдем теперь вероятность попадания случайной величины в заданный промежуток числовой оси:

$$P(0<\xi\le 2)=\int_0^2 p(x)dx=\int_0^1 0dx+\int_1^2\frac{x}{4}dx=\frac{1}{4}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^2=\frac{4-1}{8}=\frac{3}{8}.$$

Итак, вероятность того, что случайная величина ξ попадет в полуинтервал (0; 2], равна $\frac{3}{8}=0,375.$ Среднее значение этой случайной величины равно $\frac{13}{6}=2\frac{1}{6}\approx 2{,}167$, а средний разброс вокруг среднего значения приближенно равен 0,55.

Законы распределения случайных величин

Пример 24. Вероятность того, что предприятие получит полную финансовую независимость в течение данного года, равна 0,8. Составить закон распределения числа предприятий, которые получат полную финансовую независимость в течение данного года, из интересующих нас четырех. Найти числовые характеристики распределения.

Решение. Число предприятий, которые получат полную финансовую независимость в течение данного года, — случайная величина ξ. Ее возможные значения: 0, 1, 2, 3 и 4. Вероятность того, что любое из этих предприятий получит полную финансовую независимость в течение данного года, постоянна и равна 0,8. Следовательно, имеют место испытания по схеме Бернулли. Значит, случайная величина ξ распределена по биномиальному закону. Найдем вероятности возможных значений случайной величины:

$$q = 1 - p = 1 - 0,8 = 0,2;$$

$$P(\xi = 0) = P_4(0) = C_4^0 p^0 q^4 = q^4 = 0,2^4 = 0,0016; \qquad C_4^0 = 1;$$

$$P(\xi = 1) = P_4(1) = C_4^1 p q^3 = 4 \cdot 0,8 \cdot 0,2^3 = 0,0256; \qquad C_4^1 = 4;$$

$$P(\xi = 2) = P_4(2) = C_4^2 p^2 q^2 = 6 \cdot 0,8^2 \cdot 0,2^2 = 0,1536; \qquad C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6;$$

$$P(\xi = 3) = P_4(3) = C_4^3 p^3 q = 4 \cdot 0,8^3 \cdot 0,2 = 0,4096; \qquad C_4^3 = C_4^1 = 4;$$

$$P(\xi = 4) = P_4(4) = C_4^4 p^4 q^0 = p^4 = 0,8^4 = 0,4096; \qquad C_4^4 = C_4^0 = 1.$$

Проверка:

$$P_4(0)+P_4(1)+P_4(2)+P_4(3)+P_4(4)=0,0016+0,0256+0,1536+0,4096+0,4096=1.$$

Ряд распределения:

ξ	0	1	2	3	4
P_i	0,0016	0,0256	0,1536	0,4096	0,4096

Числовые характеристики:

$$M\xi=np=4\cdot 0,8=3,2;\ \ D\xi=npq=4\cdot 0,8\cdot 0,2=0,64;\ \ \sigma\xi=\sqrt{D\xi}=0,8.$$

Пример 25. Устройство состоит из большого числа независимо работающих элементов с одинаковой (очень малой) вероятностью отказа каждого элемента за время T. Найти среднее число отказавших за время T элементов, если вероятность того, что за это время откажет хотя бы один элемент, равна 0,98. Составить закон распределения числа отказавших за время T элементов и найти числовые характеристики этого закона.

Решение. По условию число элементов велико, элементы работают независимо и вероятность отказа каждого элемента одинакова и весьма мала. Из этого следует, что число отказов за время T имеет распределение Пуассона:

$$P(m)=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda},$$

где m — число отказов за время T, λ — параметр распределения (среднее число отказавших элементов за время T).

Нужно найти параметр λ. Вероятность отказа хотя бы одного элемента выразим через вероятность противоположного события, т. е. вероятность того, что не отказал ни один элемент (0 отказов) за время T:

$$P(m \geq 1) = 1 - P(0) = 1 - \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} = 1 - e^{-\lambda} = 0{,}98 \text{ (по условию).}$$

Отсюда $e^{-\lambda} = 1 - 0{,}98 = 0{,}02 \Rightarrow \lambda = -\ln 0{,}02 \approx 3{,}912.$

Следовательно,

$$P(m) = \frac{(3{,}912)^m}{m!}e^{-3{,}912} = \frac{(3{,}912)^m}{m!} \cdot 0{,}02;$$

$$P(0) = \frac{(3{,}912)^0}{0!} \cdot 0{,}02 = 0{,}02; \quad P(1) = \frac{3{,}912}{1!} \cdot 0{,}02 = 3{,}912 \cdot 0{,}02 \approx 0{,}078;$$

$$P(2) = \frac{(3{,}912)^2}{2!} \cdot 0{,}02 \approx 0{,}153; \quad P(3) = \frac{(3{,}912)^3}{3!} \cdot 0{,}02 \approx 0{,}199;$$

$$P(4) = \frac{(3{,}912)^4}{4!} \cdot 0{,}02 \approx 0{,}195.$$

Ряд распределения:

ξ	0	1	2	3	4	...
P_i	0,02	0,078	0,153	0,199	0,195	...

Числовые характеристики:

$$M\xi=\lambda=3{,}912;\quad D\xi=\lambda=3{,}912;\quad \sigma(\xi)=\sqrt{D\xi}=\sqrt{3{,}912}\approx 1{,}978.$$

Пример 26. В коробке лежат 7 карандашей, из которых 4 — красные. Наудачу извлекаются 3 карандаша. Составить закон распределения случайной величины ξ — числа извлеченных красных карандашей. Найти числовые характеристики распределения.

Решение. В опыте из множества элементов определенного состава извлекается подмножество тоже определенного состава. Случайная величина — число извлеченных элементов с заданным признаком. Рабочая модель в данном случае — «схема урн». Следовательно, имеет место гипергеометрическое распределение:

$$P(\xi=m)=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n},$$

где N — число элементов в множестве, n — число извлеченных элементов, M — число элементов, обладающих заданным признаком, m — число извлеченных элементов с заданным признаком.

Возможные значения случайной величины ξ: 0, 1, 2, 3. $N=7$; $M=4$; $n=3$.

Вероятность возможных значений случайной величины:

$$P(\xi=0)=\frac{C_4^0C_3^3}{C_7^3}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot1}{7\cdot6\cdot5}=\frac{1}{35};\quad P(\xi=1)=\frac{C_4^1C_3^2}{C_7^3}=\frac{4\cdot3\cdot6}{7\cdot6\cdot5}=\frac{12}{35};$$

$$P(\xi=2)=\frac{C_4^2C_3^1}{C_7^3}=\frac{6\cdot3\cdot6}{7\cdot6\cdot5}=\frac{18}{35};\quad P(\xi=3)=\frac{C_4^3C_3^0}{C_7^4}=\frac{4\cdot1\cdot6}{7\cdot6\cdot5}=\frac{4}{35}.$$

Ряд распределения:

ξ	0	1	2	3
P_i	1/35	12/35	18/35	4/35

Числовые характеристики:

$$p=\frac{M}{N}=\frac{4}{7};\quad q=1-p=\frac{3}{7};\quad M\xi= np=3\cdot\frac{4}{7}=\frac{12}{7};$$

$$D\xi=npq\cdot\frac{N-n}{N-1}=\frac{12}{7}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{7-3}{7-1}=\frac{24}{49};\quad \sigma(\xi)=\sqrt{D\xi}=\frac{\sqrt{24}}{7}\approx 0,7.$$

Пример 27. Вероятность появления определенного результата (событие A) в ходе эксперимента равна 0,3. Эксперимент повторяют до тех пор, пока не появится событие A. Составить закон распределения числа проведенных экспериментов. Найти числовые характеристики распределения.

Решение. Проводятся испытания, в ходе которых вероятность появления события постоянна. Испытания заканчиваются с первым появлением события A. Случайная величина ξ — число проведенных испытаний. Эта случайная величина имеет геометрическое распределение.

$$P(\xi=m)=q^{m-1}p,\quad p=P(A)=0,3\,,\quad q=1-p=0,7.$$

Возможные значения случайной величины ξ: 1, 2, 3, 4, ...

Найдем их вероятности:

$$P(\xi=1)=0,3\,,\quad P(\xi=2)=0,7\cdot 0,3=0,21\,,\quad P(\xi=3)=0,7^2\cdot 0,3=0,49\cdot 0,3=0,147;$$

$$P(\xi=4)=0,7^3\cdot 0,3=0,1029;\quad \ldots .$$

Ряд распределения:

ξ	1	2	3	4	...
P_i	0,3	0,21	0,147	0,1029	...

Числовые характеристики:

$$M\xi = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,3} \approx 3,33;\quad D\xi = \frac{q}{p^2} = \frac{0,7}{0,09} \approx 7,78;\quad \sigma(\xi) = \sqrt{D\xi} \approx 2,79.$$

Пример 28. Охотник стреляет по дичи до первого попадания, но успевает сделать не более трех выстрелов. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,7. Составить закон распределения случайной величины ξ — числа промахов. Найти числовые характеристики распределения.

Решение. Возможные значения случайной величины ξ: 0, 1, 2, 3. Найдем вероятности этих значений. Вероятность того, что $\xi = 0$, т. е. что нет ни одного промаха, равна вероятности того, что первый же выстрел был удачный, значит $P(\xi = 0) = 0,7.$ То, что был только один промах, означает, что попадание в цель произошло при втором выстреле, т. е. $P(\xi = 1) = 0,3 \cdot 0,7 = 0,21.$

$\xi = 2$ в том случае, когда два первых выстрела в цель не попали, а третий выстрел поразил цель:

$$P(\xi = 2) = 0,3^2 \cdot 0,7 = 0,09 \cdot 0,7 = 0,063.$$

Значение ξ будет равно 3 тогда, когда все три выстрела были неудачны:

$$P(\xi = 3) = 0,3^3 = 0,027.$$

$$P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) + P(\xi = 3) = 0,7 + 0,21 + 0,063 + 0,027 = 1.$$

Ряд распределения:

ξ	0	1	2	3
P_i	0,7	0,21	0,063	0,027

Числовые характеристики:

$$M\xi = \sum x_i p_i = 0 \cdot 0,7 + 1 \cdot 0,21 + 2 \cdot 0,063 + 3 \cdot 0,027 = 0,417;$$

$$M(\xi^2) = \sum x_i^2 p_i = 0^2 \cdot 0,7 + 1^2 \cdot 0,21 + 2^2 \cdot 0,063 + 3^2 \cdot 0,027 = 0,21 + 4 \cdot 0,063 + 9 \cdot 0,027 = 0,705;$$

$$D\xi = M(\xi^2) - \left[M(\xi)\right]^2 = 0,705 - (0,417)^2 \approx 0,531; \quad \sigma\xi = \sqrt{D\xi} = \sqrt{0,531} \approx 0,729.$$

Здесь имеет место модифицированное геометрическое распределение (возможные значения случайной величины ξ начинаются с 0, а не с 1) с ограничением числа испытаний (число испытаний не больше заданной величины). Поэтому подсчет числовых характеристик ведется по общим формулам (по формулам для любых законов распределения).

Пример 29. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения — 15 мин. Составить закон распределения случайной величины ξ — времени ожидания очередного автобуса. Найти числовые характеристики распределения. Определить вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее 5 мин.

Решение. Поскольку автобус подходит к остановке регулярно с интервалом 15 мин, случайная величина — время ожидания очередного автобуса — имеет равномерное распределение на интервале $(0,15)$.

Следовательно, $a = 0$, $b = 15$,

$$p(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<a,\\ \dfrac{1}{b-a} & \text{при } a\le x\le b,\\ 0 & \text{при } x>b.\end{cases}\quad F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при } a\le x\le b,\\ 1 & \text{при } x>b.\end{cases}$$

Тогда

$$p(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ \dfrac{1}{15} & \text{при } 0\le x\le 15,\\ 0 & \text{при } x>15.\end{cases}\quad F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ \dfrac{x}{15} & \text{при } 0\le x\le 15,\\ 1 & \text{при } x>15.\end{cases}$$

$$M\xi=\frac{b+a}{2}=\frac{15}{2}=7{,}5;\quad D\xi=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{15^2}{12}=\frac{225}{12}=18{,}75;\ \sigma(\xi)=\sqrt{D\xi}\approx 4{,}33.$$

$$P(0\le ¾< 5)=F(5)-F(0)=\frac{5}{15}-0=\frac{1}{3}\approx 0{,}33.$$

Пример 30. Автомат штампует детали. Стандартная (проектная) длина детали равна 50 мм. Систематическая ошибка длины детали при штамповке отсутствует. Случайная ошибка изготовления такова, что фактическая длина изготовленных деталей не менее 32 мм и не более 68 мм. Составить закон распределения контролируемой величины ξ — длины изготовленной детали. Найти числовые характеристики распределения. Найти вероятность того, что длина наудачу взятой детали: а) больше 55 мм; б) меньше 40 мм.

Решение. Из условия задачи (систематическая ошибка отсутствует, случайная ошибка является суммой воздействия множества случайных факторов в процессе изготовления) следует, что случайная величина ξ (длина изготовленной детали) имеет нормальное распределение. Ее математические ожидание совпадает с проектной длиной детали (т. е. $a = 50$ мм). Фактическая длина находится в пределах от 32 мм до 68 мм, т. е. $P(32 \le \xi \le 68) = 1$. Воспользуемся правилом «трех сигм»: значение нормально распределенной случайной величины практически никогда не отклоняется от своего математического ожидания на величину, большую чем 3σ, где σ — среднеквадратическое отклонение данной случайной величины.

$$P(|\xi - a| < 3\sigma) = 0{,}9973 \approx 1.$$

Это условие дает возможность определить параметр σ:

$$P(32 \le \xi \le 68) = P(32 < \xi < 68) =$$
$$= P(32 - 50 < \xi - 50 < 68 - 50) = P(-18 < \xi - 50 < 18) =$$
$$= P(|\xi - 50| < 18) = P(|\xi - a| < 18) = 1, \;\Rightarrow\; 3\sigma = 18, \;\Rightarrow\; \sigma = 6.$$

Итак, определены параметры нормального закона распределения: $a = 50,\ \sigma = 6$.

Плотность распределения вероятностей:

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-50)^2}{72}};$$

Функция распределения:

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{\frac{-(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt=\frac{1}{6\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{\frac{-(t-50)^2}{72}}dt.$$

Числовые характеристики:

$$M\xi=a=50;\ D\xi=\sigma^2=36;\ \sigma(\xi)=\sigma=\sqrt{D\xi}=6.$$

$$P(\xi>55)=P(55<\xi<68)=\Phi\left(\frac{68-50}{6}\right)-\Phi\left(\frac{55-50}{6}\right)=\Phi(3)-\Phi(0,83)=0,49865-0,2967\approx 0,202.$$

$$P(\xi<40)=P(32<\xi<40)=\Phi\left(\frac{40-50}{6}\right)-\Phi\left(\frac{32-50}{6}\right)=-\Phi(1,67)+\Phi(3)=0,49865-0,4525\approx 0,046.$$

Пример 31. На шоссе установлен контрольный пункт для проверки технического состояния грузовых автомобилей. Среднее количество подлежащих контролю автомобилей, проходящих через контрольный пункт за 1 час, равно 5. Найти закон распределения случайной величины T — времени ожидания очередной машины контролером. Определить среднее время ожидания очередной машины и среднеквадратическое отклонение времени ожидания.

Решение. Можно считать, что поток машин, подлежащих проверке, является простейшим потоком случайных событий, так как практически выполнены все условия такого потока: стационарность (независимость от начальной точки отсчета времени), отсутствие последействия (независимость от событий, предшествующих начальной точке отсчета времени), ординарность (вероятность появления одного события в малом промежутке времени значительно выше вероятности появления двух и более событий в таком же промежутке времени). Следовательно, случайная величина T — время ожидания очередной машины (очередного случайного события) — имеет показательное распределение с параметром λ, где λ — среднее число событий (т. е. проезжающих машин, подлежащих контролю) за единицу времени. Значит, в нашем случае $\lambda = 5$.

Плотность показательного закона распределения:

$$p(t)=\begin{cases}0 & \text{при } t<0,\\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{при } t\geq 0\end{cases}, \text{ т. е. в нашем случае } p(t)=\begin{cases}0 & \text{при } t<0,\\ 5e^{-5t} & \text{при } t\geq 0.\end{cases}$$

Функция распределения:

$$F(t)=P(T<t)=\begin{cases}0 & \text{при } t<0,\\ 1-e^{-\lambda t} & \text{при } t\geq 0.\end{cases}, \text{ т. е. в нашем случае } F(t)=\begin{cases}0 & \text{при } t<0,\\ 1-e^{-5t} & \text{при } t\geq 0.\end{cases}$$

$$M(T)=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{5}=0{,}2 \text{ ч}=12 \text{ мин},$$

Контролер будет в среднем ждать очередную машину 12 мин.

$$D(T)=\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{25}=0{,}04 \text{ ч}^2,\ \ \sigma(T)=\frac{1}{\lambda}=0{,}2 \text{ ч}=12 \text{ мин}.$$

Мода, медиана, асимметрия, эксцесс

Пример 32. Найти числовые характеристики (математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение), моду и медиану дискретной случайной величины ξ, заданной рядом распределения.

x_i	0	2	5	7	–
P_i	0,1	0,2	0,4	0,3	$\sum p_i = 1$

Решение.

$$M\xi = 0\cdot 0{,}1 + 2\cdot 0{,}2 + 5\cdot 0{,}4 + 7\cdot 0{,}3 = 0{,}4 + 2 + 2{,}1 = 4{,}5;$$

$$M(\xi^2) = 0^2\cdot 0{,}1 + 2^2\cdot 0{,}2 + 5^2\cdot 0{,}4 + 7^2\cdot 0{,}3 = 0\cdot 0{,}1 + 4\cdot 0{,}2 + 25\cdot 0{,}4 + 49\cdot 0{,}3 =$$

$$= 0{,}8 + 10 + 14{,}7 = 25{,}5; \quad D\xi = 25{,}5 - (4{,}5)^2 = 25{,}5 - 20{,}25 = 5{,}25; \quad \sigma(\xi) = \sqrt{D\xi} \approx 2{,}29.$$

Модой дискретной случайной величины является то ее значение, которое она принимает с максимальной вероятностью. В данном случае с наибольшей вероятностью (0,4) случайная величина принимает значение 5.

$$P(x=5) = 0{,}4 = \max p_i = \max\{0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}4;\ 0{,}3\}.$$

Следовательно, ее мода $M_o = 5$.

Медианой (M_e) случайной величины ξ называется та точка x, в которой функция распределения $F(x) = P(\xi < x)$ переходит скачком или непрерывно от значений, меньших (не больших) 1/2 к значениям, большим (не меньшим) 1/2.

$$F(M_e) = P(\xi < M_e) \le \frac{1}{2}, \quad F(M_e + 0) = P(\xi < M_e + 0) \ge \frac{1}{2}.$$

Найдем функцию распределения данной случайной величины:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 0,\\ 0{,}1\,, & \text{если } 0<x\le 2,\\ 0{,}3\,, & \text{если } 2<x\le 5,\\ 0{,}7\,, & \text{если } 5<x\le 7,\\ 1\,, & \text{если } x>7.\end{cases}$$

В нашем случае при переходе через точку $x = 5$ функция распределения $F(x)$ скачком меняет свое значение от 0,3 до 0,7. Следовательно, медиана данной случайной величины $M_e = 5$.

Таким образом, для рассматриваемой случайной величины ее мода и медиана совпадают: $M_o = M_e = 5$, но они не совпадают с ее математическим ожиданием $M(\xi) = 4{,}5$.

Медиана может определяться неоднозначно. Если существует интервал (α, β), на котором $F(x) = 0{,}5$, то любая точка этого интервала может служить значением медианы.

Рассмотрим случайную величину η имеющую следующий ряд распределения:

η	2	4	5	7
P_i	0,3	0,2	0,1	0,4

Ее функция распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 2,\\ 0{,}3\,, & \text{если } 2<x\le 4,\\ 0{,}5\,, & \text{если } 4<x\le 5,\\ 0{,}6\,, & \text{если } 5<x\le 7,\\ 1\,, & \text{если } x>7.\end{cases}$$

В данном случае медианой может служить любая точка отрезка [4, 5].

Мода этой случайной величины $M_o = 7$ (это значение случайная величина принимает с наибольшей вероятностью)

Математическое ожидание:

$$M\eta = 2\cdot 0{,}3 + 4\cdot 0{,}2 + 5\cdot 0{,}1 + 7\cdot 0{,}4 = 0{,}6 + 0{,}8 + 0{,}5 + 2{,}8 = 4{,}7.$$

Итак, для случайной величины η: $M_o = 7$, $M_e = x$, где $x \in [4,\ 5]$, $M(\eta) = 4{,}7$.

Найдем для нее также дисперсию и среднеквадратическое отклонение:

$$M(\eta^2) = 4\cdot 0{,}3 + 16\cdot 0{,}2 + 25\cdot 0{,}1 + 49\cdot 0{,}4 = 1{,}2 + 3{,}2 + 2{,}5 + 19{,}6 = 26{,}5.$$

$$D(\eta) = M(\eta^2) - (M\eta)^2 = 26{,}5 - (4{,}7)^2 = 4{,}41, \qquad \sigma(\eta) = \sqrt{D(\eta)} = \sqrt{4{,}41} = 2{,}1.$$

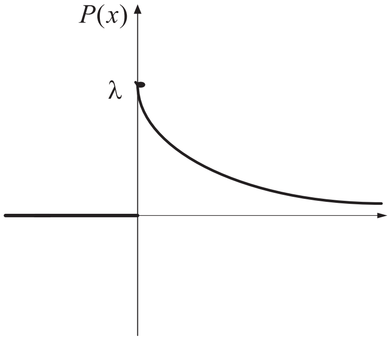
Пример 33. Найти моду, медиану, асимметрию и эксцесс показательного распределения.

Решение. Рассмотрим показательное распределение с параметром λ $(\lambda>0)$.

Плотность распределения: $p(x)=\lambda e^{-\lambda x}\quad(x\geq 0)$.

Функция распределения: $F(x)=1-e^{-\lambda x}\quad(x\geq 0)$.

Математическое ожидание: $M(\xi)=\dfrac{1}{\lambda}$; дисперсия: $D(\xi)=\dfrac{1}{\lambda^2}$; среднеквадратическое отклонение: $\sigma(\xi)=\dfrac{1}{\lambda}$.



Максимум плотности распределения $p(x)=\lambda e^{-\lambda x}\quad(x\geq 0,\ \lambda>0)$ находится, очевидно, в точке $x=0$, следовательно, мода распределения $M_o=0$ (как показано на рисунке).

Медиану найдем как корень уравнения $F(x)=P(\xi<x)=0,5$:

$$F(x)=1-e^{-\lambda x}=0,5,\Rightarrow e^{-\lambda x}=0,5,\Rightarrow-\lambda x=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2,\ x=\frac{\ln 2}{\lambda}.$$

Следовательно, $M_e=\dfrac{1}{\lambda}\ln 2$.

Итак, $M_o=0,\quad M_e=\dfrac{1}{\lambda}\ln 2,\quad M\xi=\dfrac{1}{\lambda}$. В силу того, что $\ln 2\approx 0,693<1,\quad M_o<M_e<M\xi$.

Для отыскания асимметрии (A_s) и эксцесса (E_k) найдем центральные моменты третьего (μ_3) и четвертого (μ_4) порядка:

$$\mu_3 = M(\xi - M\xi)^3 = M(\xi - \frac{1}{\lambda})^3, \ \ \mu_4 = M(\xi - M\xi)^4 = M(\xi - \frac{1}{\lambda})^4.$$

$$\mu_3 = \lambda\int_0^\infty (x - \frac{1}{\lambda})^3 e^{-\lambda x}dx = \begin{bmatrix} u = (x-\frac{1}{\lambda})^3; & dv = \lambda e^{-\lambda x}dx; \\ du = 3(x-\frac{1}{\lambda})^2 dx; & v = -e^{-\lambda x}. \end{bmatrix} =$$

$$= -(x-\frac{1}{\lambda})^3 e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty + 3\int_0^\infty (x-\frac{1}{\lambda})^2 e^{-\lambda x}dx = -\frac{1}{\lambda^3} + \frac{3}{\lambda}\int_0^\infty (x-\frac{1}{\lambda})^2 e^{-\lambda x}d(\lambda x) =$$

$$= \begin{bmatrix} u = (x-\frac{1}{\lambda})^2; & dv = e^{-\lambda x}d(\lambda x); \\ du = 2(x-\frac{1}{\lambda})dx; & v = -e^{-\lambda x}. \end{bmatrix} = -\frac{1}{\lambda^3} + \frac{3}{\lambda}\left[-(x-\frac{1}{\lambda})^2 e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty + 2\int_0^\infty (x-\frac{1}{\lambda})e^{-\lambda x}dx\right] =$$

$$= -\frac{1}{\lambda^3} + \frac{3}{\lambda^3} + \frac{6}{\lambda^2}\int_0^\infty (x-\frac{1}{\lambda})e^{-\lambda x}d(\lambda x) = \begin{bmatrix} u = (x-\frac{1}{\lambda}); & dv = e^{-\lambda x}d(\lambda x); \\ du = dx; & v = -e^{-\lambda x}. \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{2}{\lambda^3} + \frac{6}{\lambda^2}\left[-(x-\frac{1}{\lambda})e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x}dx\right] = \frac{2}{\lambda^3} - \frac{6}{\lambda^3} - \frac{6}{\lambda^3}e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty = \frac{2}{\lambda^3} - \frac{6}{\lambda^3} + \frac{6}{\lambda^3} = \frac{2}{\lambda^3}.$$

Итак, $\mu_3 = \dfrac{2}{\lambda^3}$.

$$\mu_4=\lambda\int_0^{\infty}(x-\frac{1}{\lambda})^4e^{-\lambda x}dx=\begin{bmatrix} u=(x-\frac{1}{\lambda})^4; & dv=\lambda e^{-\lambda x}dx; \\ du=4(x-\frac{1}{\lambda})^3dx; & v=-e^{-\lambda x}. \end{bmatrix}=$$

$$=-(x-\frac{1}{\lambda})^4e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}+4\int_0^{\infty}(x-\frac{1}{\lambda})^3e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda^4}+\frac{4}{\lambda}\lambda\int_0^{\infty}(x-\frac{1}{\lambda})^3e^{-\lambda x}dx=$$

$$=\frac{1}{\lambda^4}+\frac{4}{\lambda}\mu_3=\frac{1}{\lambda^4}+\frac{4}{\lambda}\cdot\frac{2}{\lambda^3}=\frac{1}{\lambda^4}+\frac{8}{\lambda^4}=\frac{9}{\lambda^4}.$$

Итак, $\mu_4=\dfrac{9}{\lambda^4}$.

С учетом того, что $\sigma=\dfrac{1}{\lambda}$, $A_s=\dfrac{\mu_3}{\sigma^3}=\dfrac{2/\lambda^3}{1/\lambda^3}=2$, $E_k=\dfrac{\mu_4}{\sigma^4}-3=\dfrac{9/\lambda^4}{1/\lambda^4}-3=9-3=6$.

Закон больших чисел. Неравенство Чебышева

Пример 34. Вероятность появления события A в каждом испытании равна 0,25. Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что число ξ появлений события A будет заключено в пределах от 150 до 250, если будет произведено 800 испытаний.

Решение. Для оценки вероятности воспользуемся неравенством Чебышева в следующей форме:

$$P(|\xi - M\xi| \le \varepsilon) \ge 1 - \frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ. Поскольку ξ — число появлений события A в независимых испытаниях с постоянной вероятностью появления этого события в каждом испытании, т. е. в испытаниях по схеме Бернулли, то оно имеет биномиальное распределение. Следовательно, $M\xi = np,\ D\xi = npq$.

В нашем случае:

$$n = 800,\ p = 0{,}25,\ \Rightarrow\ M\xi = np = 800 \cdot 0{,}25 = 200,\ D\xi = npq = 200 \cdot 0{,}75 = 150,\ q = 1 - p = 0{,}75.$$

Тогда

$$P(150 \le \xi \le 250) = P(150 - 200 \le \xi - 200 \le 250 - 200) =$$
$$= P(-50 \le \xi - 200 \le 50) = P(|\xi - 200| \le 50) = P(|\xi - M\xi| \le 50).$$

Воспользуемся неравенством Чебышева при $\varepsilon = 50$:

$$P(150 \le \xi \le 250) = P(|\xi - M\xi| \le 50) \ge 1 - \frac{150}{50^2} = 1 - \frac{150}{2500} = 1 - 0{,}06 = 0{,}94.$$

Таким образом, $P(150 \le \xi \le 250) \ge 0{,}94$.

Центральная предельная теорема

Пример 35. Пусть проводится измерение, и ξ — случайная ошибка измерения. Тогда ξ возникает в результате суммарного наложения большого числа не зависящих друг от друга факторов, порождающих ошибки; каждый из этих факторов оказывает на ошибку малое влияние. Таким образом, величину ξ можно считать распределенной нормально.

Пример 36. Пусть ξ — длина березового листка, случайно выбранного из некоторого множества сорванных листков. Тогда ξ есть случайная величина, получающаяся наложением многих малых, не зависящих друг от друга факторов. Поэтому для ξ может быть принято нормальное распределение.

Поток событий. Функция надежности

Пример 37. Вызовы, поступающие на АТС, представляют собой простейший поток событий. Известно, что в среднем на АТС за 2 минуты поступает 5 вызовов. Найти вероятность того, что за 4 минуты на АТС поступит 10 вызовов.

Решение. В нашем случае $t = 4$ минуты, $\lambda = 2{,}5$ вызова в минуту. Следовательно, $\lambda t = 2{,}5 \cdot 4 = 10$, $k = 10$. Воспользуемся формулой Пуассона:

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}.$$

Для вычисления значения 10! используем формулу Стирлинга:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n};$$

$$10! \approx \sqrt{2\pi \cdot 10} \cdot 10^{10} e^{-10};$$

$$P_4(10) = \frac{10^{10}}{10!} e^{-10} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 10}} = \frac{1}{\sqrt{20\pi}} \approx \frac{1}{7,93} \approx 0,126.$$

Вероятность того, что за 4 минуты на АТС поступит ровно 10 вызовов, приближенно равна 0,126.

Пример 38. Средний срок службы электролампы — 2 года. Найти функцию надежности работы электролампы. Определить вероятность того, что электролампа проработает 4 года.

Решение. Длительность службы электролампы можно рассматривать с хорошим приближением как случайную величину, распределенную по показательному закону. Довольно точно выполняется характеристическое свойство: вероятность безотказной работы в рассматриваемый период времени не зависит от времени предшествующей работы лампы, а зависит только от продолжительности рассматриваемого периода. Значит, для нее справедлив показательный закон надежности. Найдем интенсивность λ отказов электроламп данного типа (т. е. среднее число отказов за год). Так как средний срок ее службы 2 года, то $\lambda = \frac{1}{2} = 0,5$. Тогда функция распределения случайной величины T — времени безотказной работы электролампы — имеет следующий вид:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 - e^{-0,5t} & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

$$p(t)=\begin{cases}0 & \text{при } t<0,\\ 0,5e^{-0,5t} & \text{при } t\geq 0\end{cases},$$

где *p* (*t*) — плотность распределения вероятностей случайной величины *T*.

Функция надежности в таком случае $R(t)=e^{-0,5t}$.

По этой формуле найдем вероятность безотказной работы электролампы в течение 4 лет.

$$R(4)=P(T\geq 4)=e^{-0,5\cdot 4}=e^{-2}\approx 0,135,$$

т. е. примерно в 13,5 % случаев купленная электролампа данного типа (с данными характеристиками) проработает 4 года.

Список литературы

1. Гмурман, В. С. Теория вероятностей и математическая статистика / В. С. Гмурман. — М. : Высшая школа, 2003.
2. Гмурман, В. С. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. С. Гмурман. — М. : Высшая школа, 2003.
3. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей / Е. С. Вентцель. — М. : Наука, 1998.
4. Чистяков, В. П. Курс теории вероятностей / В. П. Чистяков. — М. : Наука, 1987.
5. Шолохович, Ф. А. Основы высшей математики / Ф. А. Шолохович, В. В. Васин. — Екатеринбург : Уральское изд-во, 2003.

Приложения

Приложение 1

Алгоритм решения задач на отыскание вероятностей случайных событий

1. Выяснить, что представляет собой рассматриваемый опыт.
2. Найти все возможные исходы этого опыта.
3. Проверить, являются ли эти исходы несовместными, равновозможными, можно ли их считать элементарными для данного опыта.
4. Проанализировать, что представляет собой событие, вероятность которого требуется отыскать, нельзя ли представить его как сумму и (или) произведение некоторых более простых событий, вероятности которых легче найти.
5. Обозначить события буквенными символами и записать искомое событие в виде формулы (через действия с событиями), если это возможно и нужно.
6. Установить (если это не сделано на предыдущих этапах), к какому разделу теории вероятностей относится данная задача.
7. Найти исходы, благоприятствующие появлению интересующих нас событий (самого исходного события или его составляющих).

8. Используя классическое (или иное, соответствующее задаче) определение вероятности и, при необходимости, формулы комбинаторики, найти вероятности составляющих событий (или самого исходного события).
9. Воспользоваться, если это нужно, теоремами сложения, умножения, формулами полной вероятности, Байеса, Бернулли и другими необходимыми формулами для отыскания вероятности заданного события.

Приведенный алгоритм носит рекомендательный характер. Он может быть применен к достаточно большому количеству задач теории вероятностей.

Пример. В двух урнах находятся шары. В первой урне — 6 красных шаров и 4 белых. Во второй урне — 5 красных и 7 белых шаров. Из каждой урны наудачу вынули по 2 шара. Найти вероятность того, что среди вынутых шаров два красных шара.

Решение.

1. Опыт состоит в извлечении наудачу по два шара из двух урн. В первой из них 10 шаров, во второй 12. Исходом опыта будут четыре извлеченных шара: два из первой урны, два — из второй. Рассматриваемые комбинации являются сочетаниями, так как извлекается часть элементов множества и порядок извлечения элементов несуществен. Весь опыт можно разбить на два подопыта: извлечение двух шаров из первой урны и извлечение двух шаров из второй урны.
2. Исходов опыта по извлечению двух шаров для каждой из данных урн будет столько, сколько сочетаний можно составить из 10 по 2 (для первой урны) и из 12 по 2 (для второй урны). По правилу умножения в комбинаторике общее число исходов данного опы-

та равно произведению полученных величин (с каждым исходом извлечения двух шаров из первой урны может сочетаться любой исход извлечения двух шаров из второй урны):

$$n = n_1 n_2 = C_{10}^2 C_{12}^2,$$

где $n_1 = C_{10}^2$ — число исходов для первой урны, $n_2 = C_{12}^2$ — число исходов для второй урны.

3. Исходы опытов (извлечение двух шаров из определенной урны) можно считать для данных опытов элементарными, т. е. не разбивать на более простые события. Они несовместные (извлечение определенных двух шаров исключает появление в том же опыте другой комбинации шаров) и равновозможные (ни один шар не обладает при извлечении какими-либо преимуществами перед другими шарами). Следовательно, можно будет воспользоваться классическим определением вероятности и формулами комбинаторики.
4. Теперь рассмотрим событие, вероятность которого нужно найти. Это событие заключается в том, что среди извлеченных четырех шаров будут два красных, т. е. будут извлечены два красных и два белых шара. Такое событие может произойти в одном из следующих случаев: будут извлечены 2 красных шара из первой урны и 2 белых шара из второй урны, или 2 белых шара из первой урны и 2 красных шара из второй, или 1 белый и 1 красный шар из первой урны и 1 белый и 1 красный шар из второй урны. Значит, искомое событие — сложное событие.
5. Введем в рассмотрение более простые события:
   A_1 — извлечение двух красных шаров из первой урны;
   A_2 — извлечение двух красных шаров из второй урны;
   B_1 — извлечение двух белых шаров из первой урны;

B_2 — извлечение двух белых шаров из второй урны;
C_1 — извлечение одного красного и одного белого шара из первой урны;
C_2 — извлечение одного красного и одного белого шара из второй урны.
Искомое событие, появление двух красных шаров в результате испытания, обозначим через A и запишем как результат действий с событиями:

$$A = A_1B_2 + B_1A_2 + C_1C_2.$$

Произведение событий соответствует их совместному появлению, а сумма — появлению хотя бы одного из слагаемых событий.

6. Итак, требуется найти вероятность события A. Это задача на действия с событиями:

$$P(A) = P(A_1B_2 + B_1A_2 + C_1C_2).$$

Следовательно, данную задачу можно решить, используя теоремы сложения и умножения вероятностей. Вероятности составляющих событий можно найти, применяя «схему урн» (выбор из множества определенного состава подмножества также определенного состава).

7. Сначала найдем благоприятные исходы для составляющих событий. Благоприятными исходами составляющих событий будут извлечения двух шаров нужного цвета из соответствующей урны. Используемые комбинации — сочетания (элементарные события при отыскании благоприятных исходов должны быть теми же, что и при рассмотрении полной группы исходов всего опыта, т. е. быть элементами пространства элементарных исходов опыта). Число благоприятных исходов для события A_1 равно числу сочетаний

из 6 по 2 (благоприятно извлечение любых двух красных шаров из имеющихся в первой урне шести): $m(A_1) = C_6^2$, для события A_2 — числу сочетаний из 5 по 2 (во второй урне всего пять красных шаров): $m(A_2) = C_5^2$, для события B_1 — числу сочетаний из 4 по 2 (в первой урне четыре белых шара, извлечение любых двух из них — благоприятный исход): $m(B_1) = C_4^2$, для события B_2 — числу сочетаний из 7 по 2 (во второй урне имеется семь белых шаров): $m(B_2) = C_7^2$, для события C_1 число благоприятных исходов равно произведению числа сочетаний из 6 по 1 на число сочетаний из 4 по 1 (т. е. извлекается один красный шар из имеющихся в первой урне шести и один белый шар из имеющихся в ней четырех): $m(C_1) = C_6^1 C_4^1$, для события C_2 число благоприятных исходов равно произведению числа сочетаний из 5 по 1 на число сочетаний из 7 по 1 (берем один красный шар из имеющихся во второй урне пяти красных и один белый шар из имеющихся в ней семи белых шаров): $m(C_2) = C_5^1 C_7^1$.

8. Найдем вероятности составляющих событий. Вероятность события равна отношению числа элементарных исходов, благоприятствующих этому событию, к числу всех элементарных исходов опыта, если все они равновозможны и несовместны (по классическому определению вероятности). В нашем случае

$$P(A_1) = m(A_1)/n_1 = C_6^2 / C_{10}^2,$$

где $n_1 = C_{10}^2$ – число всех элементарных исходов при извлечении двух шаров из первой урны;

$$P(A_2) = m(A_2)/n_2 = C_5^2 / C_{12}^2,$$

где $n_2 = C_{12}^2$ – число всех элементарных исходов при извлечении двух шаров из второй урны;

$$P(B_1) = m(B_1)/n_1 = C_4^2 / C_{10}^2,$$

$$P(B_2) = m(B_2)/n_2 = C_7^2 / C_{12}^2,$$

$$P(C_1) = m(C_1)/n_1 = C_6^1 C_4^1 / C_{10}^2,$$

$$P(C_2) = m(C_2)/n_2 = C_5^1 C_7^1 / C_{12}^2.$$

9. Воспользуемся теоремами сложения и умножения вероятностей. При применении теоремы сложения следует проверить слагаемые на несовместность, а при применении теоремы умножения — проверить сомножители на независимость. Так как события A_1B_2, B_1A_2, C_1C_2 несовместны (если произойдет одно из них, остальные произойти не могут), то вероятность суммы таких событий равна сумме их вероятностей:

$$P(A_1B_2 + B_1A_2 + C_1C_2) = P(A_1B_2) + P(B_1A_2) + P(C_1C_2).$$

События A_1, B_2, так же, как и события B_1, A_2, и так же, как события C_1, C_2, независимы (попарно), так как извлечение каких-либо шаров из первой урны никак не влияет на вероятность извлечения шаров из второй урны (состав второй урны не меняется при извлечении шаров из первой урны). Поэтому вероятность произведения таких событий равна произведению безусловных вероятностей этих событий. Таким образом,

$$P(A_1B_2 + B_1A_2 + C_1C_2) = P(A_1B_2) + P(B_1A_2) + P(C_1C_2) =$$
$$= P(A_1)P(B_2) + P(B_1)P(A_2) + P(C_1)P(C_2) =$$
$$= C_6^2 / C_{10}^2 \cdot C_7^2 / C_{12}^2 + C_4^2 / C_{10}^2 \cdot C_5^2 / C_{12}^2 + C_6^1 \cdot C_4^1 / C_{10}^2 \cdot C_5^1 \cdot C_7^1 / C_{12}^2.$$

Найдем соответствующие величины:

$$C_6^2 = 6!/(2!4!) = 6 \cdot 5/2 = 15, \quad C_7^2 = 7!/(2!5!) = 7 \cdot 6/2 = 21,$$
$$C_4^2 = 4!/(2!2!) = 4 \cdot 3/2 = 6, \quad C_5^2 = 5!/(2!3!) = 5 \cdot 4/2 = 10,$$
$$C_6^1 C_4^1 = 6 \cdot 4 = 24, \quad C_5^1 C_7^1 = 5 \cdot 7 = 35,$$
$$C_{10}^2 = 10!/(2!8!) = 10 \cdot 9/2 = 45, \quad C_{12}^2 = 12!/(2!10!) = 12 \cdot 11/2 = 66.$$

Окончательно

$$P(A) = 15 \cdot 21/(45 \cdot 66) + 6 \cdot 10/(45 \cdot 66) + 24 \cdot 35/(45 \cdot 66) =$$
$$= 21/(9 \cdot 22) + 4/(9 \cdot 22) + 8 \cdot 7/(9 \cdot 22) = (21 + 4 + 56)/(9 \cdot 22) =$$
$$= 81/(9 \cdot 22) = 9/22.$$

Ответ: $P(A) = 9/22$.

Приложение 2

Формулы комбинаторики

Таблица П. 2.1

Правила комбинаторики

Название	Формулировка
Правило суммы (теорема сложения в комбинаторике)	Если элемент a можно выбрать m способами, а элемент b можно выбрать n способами, то выбрать один из этих элементов (a или b) можно $m + n$ способами
Правило произведения (теорема умножения в комбинаторике)	Если элемент a можно выбрать m способами и после каждого такого выбора элемент b можно выбрать n способами, то пару элементов (a, b) в указанном порядке можно выбрать mn способами

Таблица П. 2.2

Основные понятия комбинаторики

Название	Формула	Определение
Факториал	$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$	Факториалом натурального числа *n* (обозначается *n*!) называется произведение натуральных чисел подряд от 1 до *n* включительно. По определению 0! = 1 и 1! = 1
Размещения	Число размещений из *n* элементов по *m* элементов без повторения элементов: $A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$. Число размещений из *n* элементов по *m* элементов с повторением элементов: $\overline{A_n^m} = n^m$	Размещениями называются комбинации, различающиеся своим составом или порядком следования элементов. Размещения бывают без повторения элементов и с повторением элементов
Перестановки	Число перестановок из *n* элементов без повторения элементов: $P_n = n!$ Число перестановок из элементов *k* типов, в которых элемент 1-го типа повторяется n_1 раз, 2-го типа повторяется n_2 раза,.., *k*-го типа повторяется n_k раз $(n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n)$, $\overline{P_n}(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$	Перестановками называют комбинации, отличающиеся друг от друга только порядком следования элементов. Состав всех комбинаций один и тот же. Перестановки бывают двух типов: без повторения элементов и с повторением элементов

Окончание табл. П. 2.2

Название	Формула	Определение
Сочетания	Число сочетаний из *n* элементов по *m* элементов без повторения элементов $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}$. Число сочетаний из *n* элементов по *m* элементов с повторением элементов $\overline{C_n^m} = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$. Имеет место соотношение $\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^m$	Сочетаниями называются комбинации, различающиеся только своим составом. Порядок следования элементов значения не имеет. Различают сочетания без повторения элементов и сочетания с повторением элементов

Связь между размещениями, сочетаниями и перестановками

$$P_n = A_n^n; \qquad C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}; \qquad A_n^m = P_m C_n^m;$$

$$\overline{C_n^m} = \overline{P}_{n+m-1}(m, n-1) = C_{n+m-1}^m.$$

Свойства сочетаний

1. $C_n^{n-m} = C_n^m.$
2. $C_n^0 = C_n^n = 1.$
3. $C_n^1 = C_n^{n-1} = n.$
4. $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m.$
5. $\sum_{m=0}^{n} C_n^m = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n.$

Бином Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m.$$

Треугольник Паскаля (биномиальные коэффициенты)

								1								$n=0$
							1		1							$n=1$
						1		2		1						$n=2$
					1		3		3		1					$n=3$
				1		4		6		4		1				$n=4$
			1		5		10		10		5		1			$n=5$
		1		6		15		20		15		6		1		$n=6$
	1		7		21		35		35		21		7		1	$n=7$

....

Приложение 3

Таблица значений функций $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$

Таблица П. 3

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3652	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444

Продолжение табл. П. 3

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0508	0498	0,0488	0,0478	0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0413	0404	0,0396	0,0387	0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0332	0325	0,0317	0,0310	0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0264	0258	0,0252	0,0246	0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0208	0203	0,0198	0,0194	0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0163	0158	0,0154	0,0151	0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0126	0122	0,0119	0,0116	0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0096	0093	0,0091	0,0088	0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0073	0071	0,0069	0,0067	0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0055	0053	0,0051	0,0050	0048	0,0047	0,0046

Окончание табл. П. 3

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

Приложение 4

Таблица значений функций $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{\frac{-z^2}{2}} dz$

Таблица П. 4

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,16	0,0636	0,32	0,1255	0,48	0,1844
0,01	0,0040	0,17	0,0675	0,33	0,1293	0,49	0,1879
0,02	0,0080	0,18	0,0714	0,34	0,1331	0,50	0,1915
0,03	0,0120	0,19	0,0753	0,35	0,1368	0,51	0,1950
0,04	0,0160	0,20	0,0793	0,36	0,1406	0,52	0,1985
0,05	0,0199	0,21	0,0832	0,37	0,1443	0,53	0,2019
0,06	0,0239	0,22	0,0871	0,38	0,1480	0,54	0,2054
0,07	0,0279	0,23	0,0910	0,39	0,1517	0,55	0,2088
0,08	0,0319	0,24	0,0948	0,40	0,1554	0,56	0,2123
0,09	0,0359	0,25	0,0987	0,41	0,1591	0,57	0,2157
0,10	0,0398	0,26	0,1026	0,42	0,1628	0,58	0,2190
0,11	0,0438	0,27	0,1064	0,43	0,1664	0,59	0,2224
0,12	0,0478	0,28	0,1103	0,44	0,1700	0,60	0,2257
0,13	0,0517	0,29	0,1141	0,45	0,1736	0,61	0,2291
0,14	0,0557	0,30	0,1179	0,46	0,1772	0,62	0,2324
0,15	0,0596	0,31	0,1217	0,47	0,1808	0,63	0,2357

Продолжение табл. П. 4

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,64	0,2389	0,86	0,3051	1,08	0,3599	1,30	0,4032
0,65	0,2422	0,87	0,3078	1,09	0,3621	1,31	0,4049
0,66	0,2454	0,88	0,3106	1,10	0,3643	1,32	0,4066
0,67	0,2486	0,89	0,3133	1,11	0,3665	1,33	0,4082
0,68	0,2517	0,90	0,3159	1,12	0,3686	1,34	0,4099
0,69	0,2549	0,91	0,3186	1,13	0,3708	1,35	0,4115
0,70	0,2580	0,92	0,3212	1,14	0,3729	1,36	0,4131
0,71	0,2611	0,93	0,3238	1,15	0,3749	1,37	0,4147
0,72	0,2642	0,94	0,3264	1,16	0,3770	1,38	0,4162
0,73	0,2673	0,95	0,3289	1,17	0,3790	1,39	0,4177
0,74	0,2703	0,96	0,3315	1,18	0,3810	1,40	0,4192
0,75	0,2734	0,97	0,3340	1,19	0,3830	1,41	0,4207
0,76	0,2764	0,98	0,3365	1,20	0,3849	1,42	0,4222
0,77	0,2794	0,99	0,3389	1,21	0,3869	1,43	0,4236
0,78	0,2823	1,00	0,3413	1,22	0,3883	1,44	0,4251
0,79	0,2852	1,01	0,3438	1,23	0,3907	1,45	0,4265
0,80	0,2881	1,02	0,3461	1,24	0,3925	1,46	0,4279
0,81	0,2910	1,03	0,3485	1,25	0,3944	1,47	0,4292
0,82	0,2939	1,04	0,3508	1,26	0,3962	1,48	0,4306
0,83	0,2967	1,05	0,3531	1,27	0,3980	1,49	0,4319
0,84	0,2995	1,06	0,3554	1,28	0,3997	1,50	0,4332
0,85	0,3023	1,07	0,3577	1,29	0,4015	1,51	0,4345

Продолжение табл. П. 4

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,52	0,4357	1,74	0,4591	1,96	0,4750	2,36	0,4909
1,53	0,4370	1,75	0,4599	1,97	0,4756	2,38	0,4913
1,54	0,4382	1,76	0,4608	1,98	0,4761	2,40	0,4918
1,55	0,4394	1,77	0,4616	1,99	0,4767	2,42	0,4922
1,56	0,4406	1,78	0,4625	2,00	0,4772	2,44	0,4927
1,57	0,4418	1,79	0,4633	2,02	0,4783	2,46	0,4931
1,58	0,4429	1,80	0,4641	2,04	0,4793	2,48	0,4934
1,59	0,4441	1,81	0,4649	2,06	0,4803	2,50	0,4938
1,60	0,4452	1,82	0,4656	2,08	0,4812	2,52	0,4941
1,61	0,4463	1,83	0,4664	2,10	0,4821	2,54	0,4945
1,62	0,4474	1,84	0,4671	2,12	0,4830	2,56	0,4948
1,63	0,4484	1,85	0,4678	2,14	0,4838	2,58	0,4951
1,64	0,4495	1,86	0,4686	2,16	0,4846	2,60	0,4953
1,65	0,4505	1,87	0,4693	2,18	0,4854	2,62	0,4956
1,66	0,4515	1,88	0,4699	2,20	0,4861	2,64	0,4959
1,67	0,4525	1,89	0,4706	2,22	0,4868	2,66	0,4961
1,68	0,4535	1,90	0,4713	2,24	0,4875	2,68	0,4963
1,69	0,4545	1,91	0,4719	2,26	0,4881	2,70	0,4965
1,70	0,4554	1,92	0,4726	2,28	0,4887	2,72	0,4967
1,71	0,4564	1,93	0,4732	2,30	0,4893	2,74	0,4969
1,72	0,4573	1,94	0,4738	2,32	0,4898	2,76	0,4971
1,73	0,4582	1,95	0,4744	2,34	0,4904	2,78	0,4973

Окончание табл. П. 4

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
2,80	0,4974	2,90	0,4981	3,00	0,49865	4,00	0,499968
2,82	0,4976	2,92	0,4982	3,20	0,49931	4,50	0,499997
2,84	0,4977	2,94	0,4984	3,40	0,49966	5,00	0,499997
2,86	0,4979	2,96	0,4985	3,60	0,499841		
2,88	0,4980	2,98	0,4986	3,80	0,499928		

Оглавление

Справочник-практикум

Плескунов Михаил Александрович,
Корчёмкина Людмила Викторовна

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Редактор М. А. Терновая
Верстка О. П. Игнатьевой

Подписано в печать 13.12.2016. Формат 60×84/16.
Бумага писчая. Печать цифровая. Гарнитура Newton.
Уч.-изд. л. 6,1. Усл. печ. л. 7,9. Тираж 100 экз.
Заказ 3

Издательство Уральского университета
Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ
620049, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 5
Тел.: 8(343)375-48-25, 375-46-85, 374-19-41
E-mail: rio@urfu.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620075, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: 8(343) 350-56-64, 350-90-13
Факс: 8(343) 358-93-06
E-mail: press-urfu@mail.ru

ЛИДЕР УНИВЕРСИТЕТСКОГО КНИГОИЗДАНИЯ
УНИВЕРСИТЕТСКАЯ КНИГА
2015

9785799619466